ABC matematyki dla początkujących fizyków.

Równania różniczkowe

■ przykłady równań ■ równania zwyczajne ■ rozwiązywanie równań ■ separacja zmiennych ■ warunki początkowe i brzegowe ■ stosowanie całki oznaczonej ■ rozwiązania przykładów ■ inne przykłady: ruch w obecności tarcia, drgania tłumione, drgania wymuszone

(przed czytaniem zapoznaj się z rozdziałami dotyczącymi pochodnych i całek)

1 Przykłady

Mówiąc o równaniu różniczkowyym mamy na myśli takie równanie, w którym nieznana funkcja występuje pod znakiem pochodnej. Nie jesteśmy w stanie rozwiązać takiego równania stosując zwykłe algebraiczne przekształcenia (typu obustronnego mnożenia, dzielenia, przenoszenia wyrazów, itp.). Nie obejdzie się bez całkowania, które jest odwrotną operacją do różniczkowania. Zacznijmy od przykładów.

$\boxed{\text{Przykład 1}}$ Spadochroniarz po wyskoczeniu z samolotu porusza się z przyspieszeniem, którego wartość, z uwagi na opór powietrza, maleje wraz ze wzrostem prędkości v i wynosi $a = g - \beta v$, gdzie $g = 9.81$ m/s^2 a β jest współczynnikiem oporu powietrza. Oblicz prędkość skoczka $v(t)$ w dowolnej chwili t, zakładając, że w chwili początkowej prędkość wynosiła zero.
Wiemy, że $a = \frac{dv}{dt}$, mamy więc równanie

$$\frac{dv}{dt} = g - \beta v. \tag{1}$$

Jest to równanie na nieznaną funkcję $v(t)$. Zauważ, że ta funkcja występuje po obu stronach równania, przy czym po lewej stronie stoi pod znakiem pochodnej (stąd nazwa: równanie różniczkowe). Rozwiążemy to równanie nieco dalej.

$\boxed{\text{Przykład 2}}$ Rakieta podczas lotu zużywa paliwo na skutek spalania i wyrzutu gazów; w czasie dt spala się masa dm. Załóżmy, że początkowa masa paliwa była równa m_o i że jej ubytek w jednostce czasu (czyli dm/dt) jest stały i wynosi λ

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \tag{2}$$

(zwróć uwagę, że $\frac{dm}{dt} < 0$, dlaczego?). Znaleźć masę paliwa $m(t)$ w dowolnej chwili t oraz czas po którym całe paliwo się wyczerpie.

$\boxed{\text{Przykład 3}}$ Chcemy znaleźć masę bryły M (niech będzie to kula o promieniu R) znając jej gęstość ρ w każdym punkcie. Sytuacja jest prosta gdy gęstość jest stała. Wtedy

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \rightarrow \qquad M = \rho V.$$

A jesli gęstość nie jest stała? Zauważ, że w tym przypadku gęstość w otoczeniu danego punktu bryły przedstawimy nie jako stosunek całej masy M do objętości V (byłaby to gęstość średnia), ale jako stosunek małego fragmentu masy dm w danym punkcie do objętości dV tego fragmentu

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Jak widać, jest to pochodna masy po objętości.
Załóżmy przykładowo, że gęstość rośnie w funkcji odległości r od środka kuli następująco: $\rho(r) = A + B\sqrt{r}$, gdzie $A,\ B$ – stałe dodatnie. Wtedy mamy równanie różniczkowe

$$\frac{dm}{dV} = A + B\sqrt{r}, \tag{3}$$

które należy rozwiązać aby znaleźć $m(r)$. Zwróć uwagę, że w powyższym równaniu trzy wielkości są zmienne: r (zmienna niezależna) oraz m i V (obie zależą od r).

$\boxed{\text{Przykład 4}}$ Drgania harmoniczne. Ciężarek zawieszony na sprężynie, wychylony pionowo od położenia równowagi (np. w dół) i następnie puszczony, będzie się poruszał ruchem drgającym w kierunku pionowym (w górę i w dół względem położenia równowagi) pod wpływem siły sprężystości. Wybierzmy oś x w kierunku pionowym i przypiszmy $x = 0$ dla punktu równowagi. Współrzędna pionowa położenia ciężarka x będzie się oczywiście zmieniać podczas ruchu; jest ona funkcją czasu $x(t)$ i opisuje ją równanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x. \tag{4}$$

Znajdź rozwiązanie równania (4), $x(t) = ?$

2 Równania zwyczajne

Wszystkie równania różniczkowe podane w powyższych przykładach noszą nazwę równań zwyczajnych gdyż dotyczą funkcji jednej zmiennej. Jeśli nieznana funkcja zależy od wielu niezależnych zmiennych to mówimy wtedy o równaniach różniczkowych cząstkowych. Najwyższy stopień pochodnej występującej w równaniu nazywany jest rzędem równania. W przykładach 1–3 mamy równania 1-go rzędu, w przykładzie 4: 2-go rzędu.

2.1 Rozwiązywanie równań

Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja, która spełnia to równanie, to znaczy podstawiona do równania zamienia go w tożsamość.
Bywa, że łatwo jest rozwiązanie zgadnąć; tak jest w przypadku równania (2) z drugiego przykładu. Popatrz na to równanie w następujący sposób: wyraża ono pytanie: jaka musi być funkcja $m(t)$, której pochodna jest stała i wynosi $-\lambda$?
Taką funkcją jest $m(t) = -\lambda t + C$, gdzie C jest dowolną stałą, niezależną od t. Sprawdzamy. Lewa strona: $\frac{dm}{dt} = (-\lambda t + C)' = -\lambda$, prawa strona: $-\lambda$, czyli mamy tożsamość.
Nie zawsze jest tak prosto jak w powyższym przykładzie, często rozwiązanie równania jest sztuką i trzeba stosować specjalne sposoby.
Wróćmy jeszcze do sposobu w jaki uzyskaliśmy rozwiązanie. To zgadywanie rozwiązania to nic innego jak zastosowanie operacji całkowania do obu stron równania:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \quad / \int ... dt \quad \rightarrow \quad \int m'(t)\, dt = -\int \lambda dt,$$

co daje oczywiście podany już wynik.

Uzyskane rozwiązanie $m(t) = -\lambda t + C$ nazywamy rozwiązaniem ogólnym naszego równania, zawiera ono jedną stałą dowolną. Tak będzie dla każdego równania 1-go rzędu. W przypadku równania n-tego rzędu stałych w rozwiązaniu ogólnym będzie n. Jeśli na rozwiązanie narzucone są dodatkowe warunki (tak jest w omawianym przykładzie 2, gdzie warunkiem początkowym jest $m(t = 0) = m_o$) to wartości stałych należy tak dopasować aby te warunki były spełnione. Takie rozwiązanie z konkretnie wybraną stała (lub stałymi) nazywamy rozwiązaniem szczególnym.

2.1.1 Metoda separacji zmiennych

Rozpatrzmy równanie (1) z pierwszego przykładu. Jeśli obustronnie scałkujemy to równanie w takiej postaci w jakiej jest zapisane to nic to nie da. Popatrzmy:

$$\int v'(t)\, dt = g \int dt - \beta \int v(t) dt.$$

Całkowanie lewej strony nie stwarza problemu, natomiast po prawej napotykamy człon z całką $\int v(t)dt$, której naturalnie nie "ugryziemy" bo funkcja $v(t)$ jest przecież nieznana!

Postępowanie w tym przypadku polega na wcześniejszej separacji zmiennych v i t, zanim przystąpi się do całkowania. W tym celu należy tak przekształcić równanie aby po jednej stronie równania było wyrażenie zawierające tylko zmienną v, a po drugiej – tylko zmienną t.
Mnożąc obie strony równania przez dt i dzieląc przez $g - \beta v$ uzyskujemy pożądany efekt:

$$\frac{dv}{g - \beta v} = dt,$$

gdyż zmienna v występuje tylko po lewej stronie, a nie ma jej po prawej, i odwrotnie, zmienna t jest tylko po prawej stronie.
Teraz obustronne całkowanie tego równania nie stworzy problemów

$$\int \frac{dv}{g - \beta v} = \int dt \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\beta} \ln(g - \beta v) = t + C,$$

skąd już przez zwyłe algebraiczne przekaształcenie można wyznaczyć szukaną funkcję $v(t)$[1].

2.1.2 Warunki początkowe. Stosowanie całki oznaczonej

W konkretnych przypadkach, gdy podane są warunki początkowe (lub brzegowe), wygodniej jest całkować w określonych granicach zamiast posługiwać się całką nieoznaczoną. Otrzymuje się wtedy rozwiązanie szczególne, adekwatne do zadanych warunków.
Wróćmy do rozpatrywanego ostatnio przykładu. Podane jest, że w chwili początkowej $t = 0$ prędkość początkowa $v_o = 0$. Całkujemy w granicach, dla zmiennej t: $0 \div t$, dla zmiennej v: $0 \div v(t)$ (prędkość $v(t)$ odpowiada chwili t)

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \beta v} = \int_0^t dt,$$

co daje

$$-\frac{1}{\beta} \ln(g - \beta v)\Big|_0^v = t\Big|_0^t \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\beta}[\ln(g - \beta v) - \ln g] = t$$

$$\rightarrow \quad \ln \frac{g - \beta v}{g} = -\beta t.$$

Z ostatniej równości wyznaczamy już przez zwykłe przekształcenie szukaną funkcję $v(t)$:

$$v(t) = \frac{g}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right).$$

Możesz sprawdzić, że znaleziona funkcja $v(t)$ spełnia równanie. Wstaw ją do obu stron równania wyjściowego $v'(t) = g - \beta v(t)$ i sprawdź, czy otrzymuje się tożsamość. Sprawdź też, że spełniony jest warunek początkowy $v(t) = 0$ dla $t = 0$.

[1] pod znakiem logarytmu nie trzeba brać modułu gdyż wyrażenie $g - \beta v$ jest zawsze dodatnie

2.2 Rozwiązania przykładów

Dla dwóch pierwszych przykładów możemy już podać rozwiązania.

Przykład 1

- równanie: $\boxed{\dfrac{dv}{dt} = g - \beta v}$
- warunek początkowy: $v(t=0) = 0$
- rozwiązanie: $\boxed{v(t) = \dfrac{g}{\beta}\left(1 - e^{-\beta\, t}\right)}$

Przykład 2
Aby do końca rozwiązać przykład należy jeszcze dopasować stałą C aby spełniony był warunek, że dla w chwili początkowej $m(t=0) = m_o$, czyli
$m(t=0) = -\lambda \cdot 0 + C$, skąd wynika, że $C = m_o$. Ostatecznie uzyskujemy rozwiązanie zgodne z warunkiem początkowym: $m(t) = m_o - \lambda t$.
Możesz to samo uzyskać stosując technikę separacji zmiennych i całkę oznaczoną. Po pomnożeniu równania przez dt i scałkowaniu uzyskujemy wynik.
$dm = -\lambda dt \quad \to \quad \int_{m_o}^{m} dm = -\lambda \int_0^t dt \quad \to \quad m(t) = m_o - \lambda t.$

- równanie: $\boxed{\dfrac{dm}{dt} = -\lambda}$
- warunek początkowy: $m(t=0) = m_o$
- rozwiązanie: $\boxed{m(t) = m_o - \lambda t}$

Przykład 3
Pomnożymy obie strony równania (3) przez dV

$$dm = (A + B\sqrt{r})\, dV.$$

Jeśli nasza bryła jest kulą to wiemy jak zależy objętość od zmiennej r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Obliczamy różniczkę dV: $dV = (\frac{4}{3}\pi r^3)' dr = 4\pi r^2 dr$ i wstawiamy do równania[2]

$$dm = (A + B\sqrt{r})\, 4\pi r^2 dr.$$

W równaniu występują teraz dwie zmienne, m i r. Są one rozseparowane, można więc całkować obustronnie równanie w zakresie zmienności promienia r, czyli $0 \div r$ i odpowiadającym mu zakresie zmienności masy, $0 \div m$ (m jest masą kuli o promieniu r)

$$\int_0^m dm = \int_0^r (A + B\sqrt{r})\, 4\pi r^2 dr \quad \to$$

$$\to \quad \int_0^m dm = 4\pi (A \int_0^r r^2 dr + B \int_0^r r^{5/2} dr) \quad \to$$

$$\to \quad m\Big|_0^{m(r)} = 4\pi (A \frac{r^3}{3}\Big|_0^r + B\frac{2}{7} r^{7/2}\Big|_0^r) \quad \to$$

$$\to \quad m(r) = 4\pi r^3 \left(\frac{A}{3} + \frac{2B}{7}\sqrt{r}\right).$$

[2] dV jest objętością elementu o powierzchni $4\pi r^2$ (sfera o promieniu r) i o nieskończenie małej grubości dr

- równanie: $\boxed{\dfrac{dm}{dr} = 4\pi r^2 (A + B\sqrt{r})}$
- warunek brzegowy: $m(r=0) = 0$
- rozwiązanie: $\boxed{m(r) = 4\pi r^3 \left(\dfrac{A}{3} + \dfrac{2B}{7}\sqrt{r}\right)}$
- szukana masa dla $r = R$: $\quad M = 4\pi R^3 \left(\frac{A}{3} + \frac{2B}{7}\sqrt{R}\right)$

Sprawdź, czy uzyskane rozwiązanie $m(r)$ spełnia równanie wyjściowe $\frac{dm}{dr} = \ldots$

Przykład 4 Rozwiązanie równania (4) łatwo zgadnąć. Zapis tego równania zawiera treść następującą: *jaka musi być funkcja $x(t)$ aby po dwukrotnym zróżniczkowaniu otrzymać tę samą funkcję $x(t)$ pomnożoną przez ujemną stałą $-\omega^2$?* Poszukaj wśród znanych funkcji elementarnych, która z nich spełnia takie kryterium. Nietrudno stwierdzić, że są dwie takie funkcje: $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$.
Sprawdzamy dla $x(t) = \sin \omega t$.
$(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t$,
$(\sin \omega t)'' = -\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$.
A więc $\sin \omega t$ jest dobrym rozwiązaniem. Ale nie ogólnym. Pamiętamy, że rozwiązanie ogólne równania 2-go rzędu powinno zawierać dwie dowolne stałe. Sprawdź, że kombinacja liniowa sinusa i kosinusa

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

gdzie a, b są dowolnymi stałymi, również spełnia równanie (4). Jest to właśnie poszukiwane rozwiązanie ogólne. Inną postacią rozwiązania ogólnego ze stałymi A, φ jest funkcja

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

(sprawdź, że tak jest).

- równanie: $\boxed{\dfrac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x}$
- rozwiązanie ogólne: $\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$

A jest amplitudą drgań (czyli maksymalnym wychyleniem od położenia równowagi), a stała φ jest wielkością kątową podawaną w radianach i nazywa się fazą drgań. Wielkość ω nazywana jest częstością kołową drgań, jest ona związana z okresem drgań T relacją $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

2.3 Inne przykłady

2.3.1 Ruch w środowisku lepkim

Załóżmy, że na poruszającą się cząstkę o masie m działa tylko jedna siła – siła oporu ośrodka. Siła oporu jest proporcjonalna do prędkości cząstki v i przeciwna do kierunku ruchu, $F = -\gamma v$ ($\gamma = const > 0$). Przyjmijmy, że w chwili początkowej prędkość wynosiła v_o. Skonstruujmy równanie opisujące ruch cząstki, czyli posłużmy się II zasadą dynamiki:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -\gamma v.} \qquad (5)$$

Rozwiązanie równania:
Separacja zmiennych:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m}\,dt$$

Całkowanie stronami:

$$\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_o} = -\frac{\gamma}{m}t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_o e^{-\frac{\gamma}{m}t}.}$$

Prędkość maleje eksponencjalnie poczynając od wartości v_o. Przy $t \to \infty$ zbliża się asymptotycznie do zera.

2.3.2 Równanie drgań harmonicznych tłumionych

Równanie z przykładu 4 opisuje czysty ruch harmoniczny, w którym drgania nie zanikają w czasie i energia drgań jest stała. Zwykle jednak występują opory ruchu (np. tarcie), których przezwyciężenie wymaga wykonania pracy kosztem energii drgań. W efekcie amplituda drgań nie jest stała i maleje w funkcji czasu.
Równanie, które opisuje ruch harmoniczny tłumiony jest podobne do równania (4) ale różni się od niego tym, że zawiera dodatkowo człon proporcjonalny do pierwszej pochodnej wychylenia x

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\beta\frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = 0.} \qquad (6)$$

Stałą β nazywamy współczynnikiem tłumienia, zaś ω_o – częstością drgań własnych, czyli częstością kołową drgań gdyby nie było tłumienia.
Dla wygody zapisu posłużymy sie dalej konwencją oznaczania pochodnej względem czasu przy pomocy kropki: $\dot{x}$ będzie oznaczać pierwszą pochodną funkcji $x(t)$, a $\ddot{x}$ jej drugą pochodną. Nasze równanie przybiera teraz postać:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\,\dot{x}(t) + \omega_o^2 x(t) = 0.$$

Jak rozwiązać to równanie? Obecność członu z pierwszą pochodną $\dot{x}(t)$ znacznie komplikuje to zadanie. Potrzeba trochę doświadczenia i intuicji; można zresztą dokonywać prób i sprawdzać czy zakończą sie sukcesem.
Spróbujmy logicznie opisać nasze przewidywania jak będzie zmieniać się w czasie funkcja $x(t)$ opisującą wychylenie od położenia równowagi drgającego obiektu. Gdyby nie było tłumienia to rozwiązanie już znamy z przykładu 4:
$x(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi)$
Spodziewamy się zatem, że:
1) mimo pojawienia się czynnika tłumiącego (powiedzmy dla ostrożności – niezbyt wielkiego) ruch dalej będzie ruchem periodycznym, możliwe, że o innym okresie, czyli z innym ω ($\omega \neq \omega_o$),
2) amplituda drgań nie będzie stała, będzie malejącą funkcją czasu i prawdopodobnie będzie dążyć asymptotycznie do zera gdy $t \to \infty$.

Zastanówmy się jaką funkcją opisać zmienność amplitudy? "Sprawcą" zaniku amplitudy jest siła oporu ośrodka, w którym zachodzi drganie, a jak widzieliśmy w poprzednim rozdziale 2.3.1 (równanie (5)), zmienność ruchu pod wpływem siły oporu opisuje malejąca eksponenta. Cóż więc szkodzi spróbować wprowadzić eksponentę $e^{-\alpha t}$ do szukanego rozwiązania? (Na razie nie określajmy wartości stałej α, dobierzemy ją poźniej.)
Słuszne więc będzie poszukiwać rozwiązania równania (6) w postaci

$$x(t) = e^{-\alpha t}g(t),$$

gdzie część wyrażona przez $e^{-\alpha t}$ spełni postulat zanikania amplitudy, a nowa nieznana funkcja $g(t)$ powinna zapewnić periodyczność ruchu. W związku z tym spodziewamy się, że równanie na funkcję $g(t)$ będzie równaniem ruchu harmonicznego, czyli równaniem typu (4), które nie będzie zawierać pierwszej pochodnej funkcji $\dot{g}(t)$.

Wstawmy postulowane rozwiązanie do (6). W tym celu trzeba wpierw policzyć pierwszą i drugą pochodną $x(t)$:
$\dot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t}g(t) + e^{-\alpha t}\dot{g}(t)$,
$\ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{-\alpha t}g(t) - \alpha e^{-\alpha t}\dot{g}(t) - \alpha e^{-\alpha t}\dot{g}(t) + e^{-\alpha t}\ddot{g}(t)$.
Po wstawieniu $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ do (6), uporządkowaniu i uproszczeniu przez czynnik $e^{-\alpha t}$ (wykonaj te operacje samodzielnie) uzyskamy równanie na nieznaną funkcję $g(t)$

$$\ddot{g}(t) + (2\beta - 2\alpha)\dot{g}(t) + (\alpha^2 - 2\beta\alpha + \omega_o^2)g(t) = 0.$$

Zgodnie z postulatem, że w równaniu na $g(t)$ nie powinno być członu z pierwszą pochodną $\dot{g}(t)$ przyjmiemy, że $\alpha = \beta$ (dotąd nie narzucaliśmu żadnego warunku na α). Równanie będzie wyglądało teraz tak:

$$\ddot{g}(t) + (\omega_o^2 - \beta^2)g(t) = 0.$$

Jeśli $\beta < \omega_o$ (co ma miejsce gdy tłumienie nie jest zbyt duże) to podstawiając

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

dochodzimy ostatecznie do równania, które już znamy z przykładu 4

$$\ddot{g}(t) = -\omega^2 g(t)$$

czyli do równania drgań harmonicznych nietłumionych, którego rozwiązaniem jest

$$g(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Mamy już wszystkie elementy potrzebne do określenia szukanej funkcji $x(t)$.

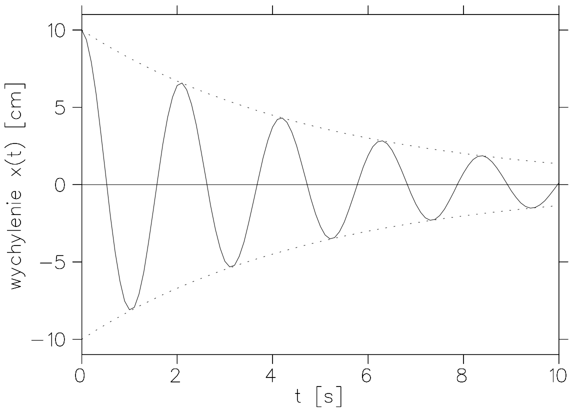
$$\boxed{x(t) = Ae^{-\beta t}\ sin(\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}\,t + \varphi).}$$

Uzyskaliśmy rozwiązanie równania drgań harmonicznych tłumionych!
Przypomnijmy, że takie drgania wystąpią gdy $\beta < \omega_o$, czyli gdy współczynnik tłumienia będzie mniejszy od częstości drgań własnych.[3]

[3]Zastanów się jak będzie wyglądać rozwiązanie w przypadku gdy $\beta > \omega_o$.

Czynnik $Ae^{-\beta t}$ opisuje malejącą w czasie amplitudę drgań, a część z sinusem wskazuje, że ruch jest okresowy [4] o częstości $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$.

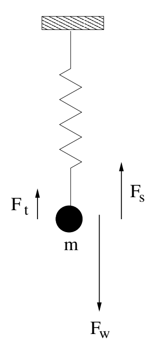
Dla ilustracji wyniku, na poniższym rysunku przedstawiony jest przykładowy wykres funkcji $x(t)$, wykonany dla następujących danych liczbowych:
$A = 10$ cm, $\beta = 0.2$ 1/s, $\omega_0 = 3$ rad/s, $\varphi = \pi/2$ rad.



2.3.3 Równanie drgań harmonicznych wymuszonych

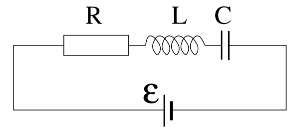
Rozpatrzmy dwa przykłady drgań wymuszonych przez siłę zmieniającą sie sinusoidalnie z częstością ω (przyjmijmy: proporcjonalnie do $\cos\omega t$). Okaże się, że mimo iż dotyczą kompletnie różnych zjawisk, będą opisane identycznym (z punktu widzenia matematyki) równaniem różniczkowym.

- Masa m przyczepiona do nieważkiej sprężyny może wykonywać drgania harmoniczne (załóżmy: w kierunku osi x, skierowanej w dół rysunku) po wpływem siły sprężystości, $F_s = -kx$, proporcjonalnej do wychylenia x od położenia równowagi. Jeśli dzieje się to w ośrodku lepkim należy uwzględnić także siłe oporu $F_t = -\gamma v$ (proporcjonalną do prędkości). Jeśli dodatkowo wprowadzimy siłę wymuszającą $F_w = F_o \cos\omega t$



  to siła wypadkowa będzie sumą tych trzech sił, $F = -kx - \gamma v + F_o \cos\omega t$.
  Pytanie: jak zmienia się położenie $x(t)$ poruszającej się masy?

- Rozpatrujemy zamknięty obwód elektryczny złożony z kondensatora o pojemności C, cewki o indukcyjności L, opornika o oporze R oraz wymuszającej siły elektromotorycznej $\varepsilon(t)$ zmieniającej się sinusoidalnie z częstością ω: $\varepsilon(t) = \varepsilon_o \cos\omega t$. Te elementy połączone są szeregowo.



  Ułożyć i rozwiązać równanie opisujące drgania w takim obwodzie RLC.

Równanie dla pierwszego przypadku.

Zapiszemy II zasadę dynamiki opisującą ruch cząstki m pod wpływem siły wypadkowej F:

$$m\ddot{x}(t) = F = -kx(t) - \gamma v(t) + F_o \cos\omega t.$$

Po wstawieniu $v(t) = \dot{x}(t)$ i po uporządkowaniu otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję położenia $x(t)$:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F_o}{m}.$$

Równanie dla drugiego przypadku.

Równanie wyjściowe opisujące zmiany ładunku $q(t)$ na okładkach kondensatora i natężenia prądu $i(t)$ w obwodzie wynika z prawa Kirchoffa (suma spadków napięć na poszczególnych elementach obwodu jest równa przyłożonej sile elektromotorycznej) i ma postać

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = \varepsilon_o \cos\omega t.$$

Po wstawieniu $i(t) = \dot{q}(t)$ i podzieleniu przez L otrzymujemy równanie różniczkowe opisujące zmienność ładunku na okładkach kondensatora w czasie, $q(t)$

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{\varepsilon_o}{L}.$$

Równania w obu przypadkach są matematycznie identyczne – różnica jest wyłącznie w stałych współczynnikach, w związku z tym rozwiązania będą takie same (z innymi współczynnikami).
Zapiszmy te równania w postaci ogólnej, dla szukanej funkcji $x = x(t)$.
Równanie drgań wymuszonych:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \cos\omega t.} \qquad (7)$$

Stała β jest współczynnikiem tłumienia; $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ (dla drgań mechanicznych), $\beta = \frac{R}{2L}$ (dla drgań w obwodzie RLC). Częstość drgań własnych ω_o wynosi odpowiednio $\omega_o = \sqrt{k/m}$ i $\omega_o = \sqrt{1/LC}$.

Rozwiązanie.
Nieznana funkcja $x(t)$ jest odpowiedzią układu na wymuszenie, a więc jest logiczne, że dopasuje sie ona (po jakimś czasie) do wymuszenia i będzie funkcją czasu o takiej samej częstości ω jaką narzuca wymuszenie, a ponieważ jest rozwiązaniem równania 2-go stopnia, więc powinna zawierać dwie stałe (zależne od warunków początkowych). Szukajmy więc rozwiązania w postaci

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

[4] Gwoli ścisłości: rozpatrywany ruch nie jest ruchem stricte okresowym gdyż nie spełnia postulatu okresowości $x(t) = x(t+T)$, należałoby go raczej nazwać ruchem quasi-okresowym.

Naszym zadaniem jest znalezienie takich stałych A, φ, przy których $x(t)$ spełnia równanie.
Wygodnie jest posłużyć się w tym celu techniką liczb zespolonych.
Rozszerzmy występujące w równaniu (7) funkcje rzeczywiste zależne od czasu na dziedzinę funkcji zespolonych, tak aby były one częściami rzeczywistymi nowych funkcji

$$\begin{aligned} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad &\rightarrow \quad z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}, \\ f_o \cos\omega t \quad &\rightarrow \quad f_o e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Równanie ma teraz postać

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_o^2 z = f_o e^{i\omega t}. \tag{7a}$$

Znajdując rozwiązanie $z(t)$ tego równania uzyskamy równocześnie rowiązanie równania (7) dla x, biorąc $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$.
Obliczmy pochodne $z(t)$ i wstawmy je do równania:

$$\dot{z} = Ai\omega e^{i(\omega t+\varphi)}, \quad \ddot{z} = -A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi)},$$

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)}(\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega) = f_o e^{i\omega t}.$$

Po uproszczeniu przez przez czynnik $e^{i\omega t}$ uzyskujemy zależność:

$$Ae^{i\varphi} = \frac{f_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}, \tag{7b}$$

z której nietrudno obliczyć amplitudę A i fazę φ liczby zespolonej $Ae^{i\varphi}$. Amplitudę liczby zespolonej oblicza się mnożąc tę liczbę przez liczbę sprzężoną, $Ae^{i\varphi} \cdot Ae^{-i\varphi} = A^2$,

$$A^2 = \tfrac{f_o}{\omega_o^2-\omega^2+2i\beta\omega} \cdot \tfrac{f_o}{\omega_o^2-\omega^2-2i\beta\omega} = \tfrac{f_o^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}.$$

Stąd

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Fazę φ obliczymy również z relacji (7b), którą wygodniej przedstawić tak:

$$\frac{1}{A}e^{-i\varphi} = \frac{1}{f_o}(\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega).$$

Tamgens fazy liczby zespolonej (w naszym przypadku jest to kąt $-\varphi$) oblicza się biorąc stosunek $\mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z) = \mathrm{tg}\,(-\varphi) = 2\beta\omega/(\omega_o^2 - \omega^2)$, czyli $\mathrm{tg}\,\varphi = -2\beta\omega/(\omega_o^2 - \omega^2)$.

Mamy już szukane amplitudę A i fazę φ, znaleźliśmy więc szukaną funkcję $z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$, a zatem i rozwiązanie równania (7), $x(t) = \mathrm{Re}(z)$:

$$\boxed{x(t) = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi),}$$

$$\text{gdzie} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}.$$