

## Ćwiczenie 43

# Halotron

### *Cel ćwiczenia*

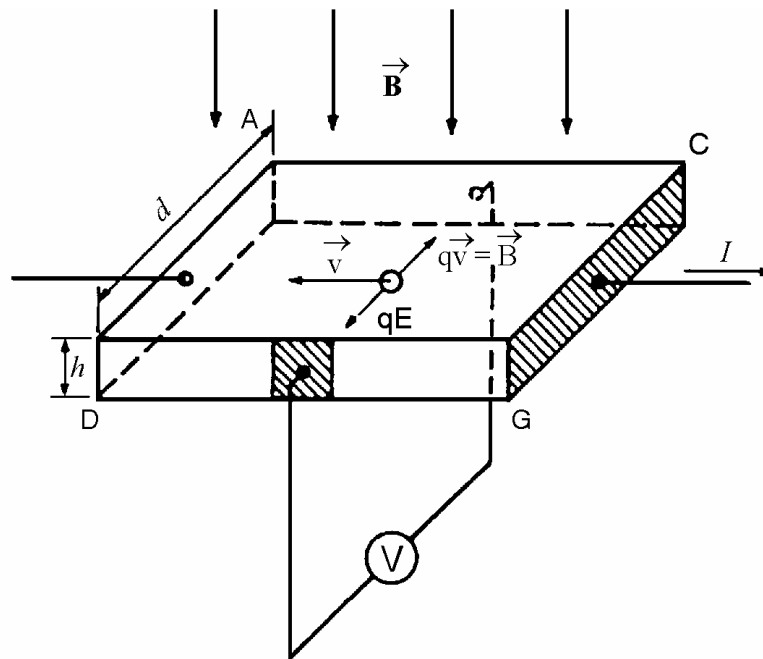
Cechowanie halotronu przy użyciu pola magnetycznego o znanej indukcji. Wykorzystanie halotronu do pomiaru przestrzennego rozkładu pola cewki kołowej i magnesu ferrytowego.

### *Wprowadzenie*

#### Zasada działania halotronu

Napięciem Halla nazywamy różnicę potencjałów powstającą w przewodniku z prądem, umieszczonym w polu magnetycznym w kierunku prostopadłym do kierunku prądu i pola. W zjawisku Halla ujawnia się zależność makroskopowej wielkości mierzalnej, jaką jest napięcie Halla, od znaku ładunku przepływającego przez przewodnik. Element elektroniczny wykorzystujący zjawisko Halla nazywany halotronem.

Rysunek 1 przedstawia schemat działania halotronu. Na nośniki prądu poruszające się w halotronie działa siła Lorentza  $\mathbf{F}$ , która odchyła je w kierunku prostopadłym zarówno do kierunku wektora prędkości  $\mathbf{v}$ , jak również do kierunku wektora indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ . Wartość siły Lorentza wynosi  $F = qvB$  gdzie  $q$  oznacza ładunek elektronu (lub innego nośnika prądu, którym w półprzewodnikach mogą być tzw. dziury),  $v$  jest średnią prędkością ruchu elektronu, zaś  $B$  wartością indukcji magnetycznej.



Rys. 1. Zasada działania halotronu

Na skutek odchylenia (ujemnych na rys. 1) ładunków  $q$  bok halotronu  $AC$  naładowuje się ujemnie, a bok  $DG$  dodatnio. Powstaje różnica potencjałów między tymi bokami zwana napięciem Halla, które może być zmierzone woltomierzem.

Z napięciem Halla związane jest pole elektryczne o natężeniu  $E_H = \frac{U_H}{d}$ , gdzie  $U_H$  oznacza napięcie Halla, natomiast  $d$  – szerokość warstwy przewodzącej. Siła działająca na nośniki prądu ze strony tego pola elektrycznego wynosi  $F_E = \frac{qU_H}{d}$ . Zwroty siły  $F$  i  $F_E$  są przeciwne, więc przemieszczenie się ładunków elektrycznych będzie trwało, dopóki te nie zrównoważą się, czyli

$$q \frac{U_H}{d} = q v B,$$

skąd

$$U_H = v B d. \quad (1)$$

Średnią prędkość ruchu nośników o ładunku  $q$  można powiązać z gęstością prądu  $j = \frac{I}{dh}$  i koncentracją nośników  $n$ , czyli liczbą nośników prądu w jednostce objętości materiału halotronu

$$j = v n q. \quad (2)$$

Ostatecznie wartość napięcia Halla wynosi

$$U_H = \frac{1}{nqh} I B. \quad (3)$$

Współczynnik proporcjonalności  $c = \frac{1}{nqh}$  nazywamy stałą halotronu.

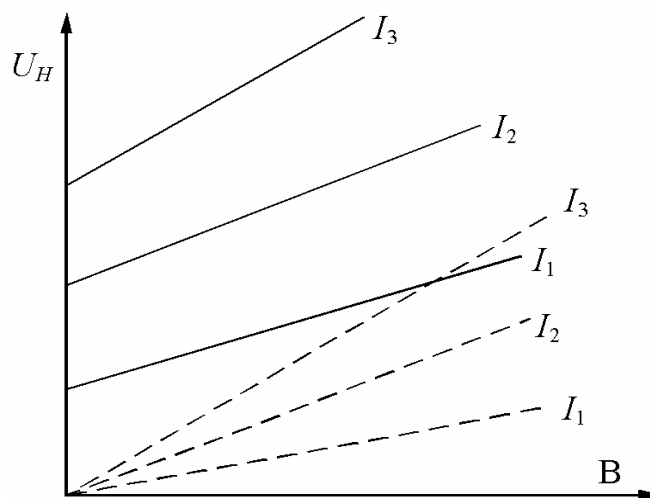
Szczegółowy opis zjawiska Halla jest bardziej złożony, gdyż nośników prądu w metalach i półprzewodnikach nie można uważać za swobodne, ale nawet ten uproszczony model wskazuje, że:

- pomiar stałej Halla pozwala znaleźć koncentrację nośników prądu i ustalić, czy są nimi elektrony, czy dziury,
- ze wzrostem koncentracji nośników maleje napięcie Halla, więc efekt jest łatwiej wykrywalny w materiałach półprzewodnikowych niż w metalach.

Do budowy halotronów stosuje się półprzewodniki w postaci litych płytek lub warstw naparowanych na ceramiczne podłoże. Trudno jest przy tym zrealizować idealną symetrię warstwy półprzewodnika oraz metalowych doprowadzeń. Oporność warstwy półprzewodnika powoduje powstanie spadku napięcia wzdłuż boków halotronu, proporcjonalnego do prądu  $i$ . Jeżeli doprowadzenia do woltomierza (rys. 1) nie znajdują się na tym samym potencjale (przy braku pola), wtedy powstaje dodatkowe napięcie  $U_R$  proporcjonalne do prądu halotronu. Mierzone napięcie wypadkowe wynosi

$$U = U_H + U_R = c I B + R I. \quad (4)$$

Charakterystyki halotronu idealnego (bez składnika  $U_R = R I$ ) i rzeczywistego przedstawia rysunek 2.



**Rys. 2.** Charakterystyki halotronu: idealne – linia przerywana, rzeczywiste – linia ciągła

Halotrony są wykorzystywane do pomiarów pola magnetycznego. Należy pamiętać, że halotron mierzy składową pola prostopadłą do powierzchni halotronu.

### Rozkład pola magnetycznego cewki kołowej i magnesu

W ćwiczeniu źródłem pola magnetycznego jest krótki solenoid o  $N$  zwojach, który możemy traktować jako kołowy przewodnik z wypadkowym prądem  $N I_s$ , gdyż długość i grubość uzwojenia jest niewielka w stosunku do jego średnicy.

Indukcję pola magnetycznego w dowolnym punkcie przestrzeni można obliczyć korzystając z prawa Biota-Savarta wyrażonego równaniem

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}, \quad \text{gdzie} \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5)$$

Symbole występujące w równaniu (5) wyjaśnione są w opisie ćwiczenia 41. Równanie (5) zastosujemy do obliczenia pola w różnych punktach przestrzeni wokół cewki kołowej. Przedstawione poniżej rezultaty dobrze ilustrują wzrost trudności obliczeniowych przy zmniejszeniu stopnia symetrii problemu.

(a) *Środek cewki kołowej.* W tym przypadku przyczynki  $d\mathbf{B}$  są równe tak co do wielkości jak i kierunku. Sumowanie przyczynków, omówione w ćw. 41, daje wartość pola

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I_s}{2R}. \quad (6)$$

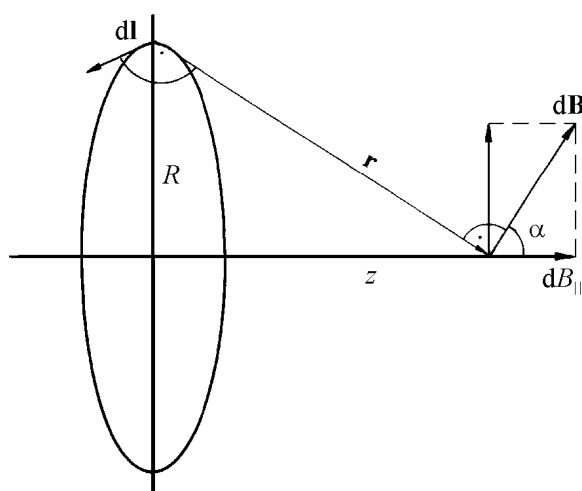
(b) *Oś symetrii cewki.* W przypadku punktów położonych na osi cewki, w odległości  $z$  od jej środka, można również uzyskać na wartość pola wyrażenie analityczne. W tym przypadku przyczynki  $d\mathbf{B}$  wynikające z prawa Biota-Savarta są również równe co do wielkości bezwzględnej,

$$dB = \frac{\mu_0 N I_S dl}{4\pi r^2}, \quad (7)$$

lecz trzeba je sumować jako wektory (patrz rys. 3). Składowe wektorów  $d\mathbf{B}$  prostopadłe do osi kasują się do zera, natomiast składowe równoległe do osi równe  $dB_{\parallel} = dB \cos\alpha = dB R/z$  po zsumowaniu dają w rezultacie

$$B(z) = \frac{B_0}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}}, \quad (8)$$

gdzie  $B_0$  oznacza pole w środku solenoidu dane wzorem (6). Szczegóły tego obliczenia wyjaśnione są w podręcznikach ([1], rozdz. 30).



**Rys. 3.** Rysunek pomocniczy do wyprowadzenia rozkładu pola wzdłuż osi cewki

(c) *Punkty na średnicy cewki kołowej.*

Dla punktów położonych poza osią symetrii rozwiązania nie da się przedstawić w postaci znanych nam funkcji elementarnych. Przedstawimy natomiast szczegóły rozwiązania numerycznego.

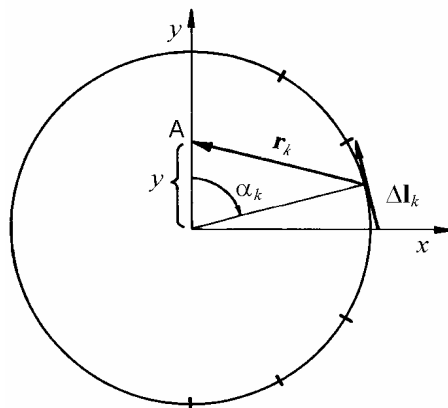
Przykładem jest obliczenie  $B$  dla punktów leżących na średnicy cewki kołowej, w odległości  $y$  od środka. Obwód koła (wystarczy rozpatrywać tylko połowę obwodu) dzielimy na  $2n$  równych części (rys. 4). Całkę (5) zastępujemy skończoną sumą przyczynków pochodzących od elementów  $\Delta\mathbf{l}_k$  obwodu koła,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{4\pi} \cdot 2 \sum_{k=1}^n \frac{\Delta\mathbf{l}_k \times \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3}. \quad (9)$$

Z rysunku widać, że długość odcinka przewodu wynosi  $|\Delta\mathbf{l}_k| = \frac{\pi R}{n}$ , natomiast kąt określający położenie  $k$ -tego odcinka wynosi  $\alpha_k = \frac{\pi}{n} \left(k - \frac{1}{2}\right)$ . Składowe wektorów  $\Delta\mathbf{l}_k$  i  $\mathbf{r}_k$  wynoszą

$$\Delta \mathbf{l}_k \left( -\frac{\pi R}{n} \cos \alpha_k, \frac{\pi R}{n} \sin \alpha_k, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_k (R \sin \alpha_k, R \cos \alpha_k - y, 0).$$



**Rys. 4.** Rysunek pomocniczy do numerycznego obliczenia pola magnetycznego wzdłuż średnicy cewki kołowej

Po obliczeniu iloczynu wektorowego  $\Delta \mathbf{l}_k \times \mathbf{r}_k$  wzór (9) można przekształcić do postaci

$$B = \frac{\mu_0 N I_S}{2R} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - p \cos \alpha_k}{(1 - 2p \cos \alpha_k + p^2)^{3/2}} \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{y}{R}, \quad (10)$$

i zrealizować obliczenie przy użyciu komputera lub kalkulatora programowanego.

Rezultaty takiego podaje tabela, przedstawiająca względną wartość pola (w stosunku do pola w środku solenoidu) jako funkcję względnego położenia punktu  $y/R$ . Dla porównania z eksperymentem można po prostu wykorzystać wynik obliczenia, gdy obwód cewki kołowej podzielony został na  $n = 192$  części, jako wystarczająco bliska granicy  $n \rightarrow \infty$ . Tabela podaje również wynik obliczenia dla innych wartości  $n$  - jak widać, podział połowy koła na  $n = 6$  części w zupełności wystarcza w przypadku małych wartości stosunku  $y/R$

**Tabela 1.** Numeryczne obliczenie rozkładu pola magnetycznego wzdłuż średnicy cewki kołowej

$n$	$p = y/R$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
6	1,0076	1,0312	1,0737	1,1412	1,2444	1,3989	1,6085	1,7772	1,5359
12	1,0076	1,0312	1,0737	1,1413	1,2456	1,4106	1,6007	2,2100	2,8704
24	1,0076	1,0312	1,0737	1,1413	1,2456	1,4106	1,6022	2,2568	3,8037
....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
192	1,0076	1,0312	1,0737	1,1413	1,2456	1,4106	1,6922	2,2571	3,9259

W podobny sposób można obliczyć pole w dowolnym punkcie przestrzeni wokół cewki (określonym przez współrzędne  $0, y, z$ ), wykonując obliczenia (9) z wektorem  $\mathbf{r}_k(R \sin \alpha_k, R \cos \alpha_k - y, z)$ .

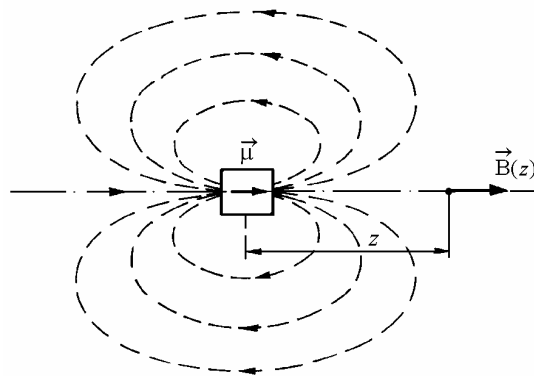
(d) Pole na osi cewki dla  $z \gg R$ , z zastosowaniem do opisu pola magnesu

Dla dużych wartości  $z$  jedynka w mianowniku wzoru (8) jest do pominięcia i otrzymujemy

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}. \quad (11)$$

Wartość  $\mu = IN\pi R^2$  czyli iloczynu prądu i efektywnej powierzchni zwojów nosi nazwę *momentu magnetycznego dipola*. Pole dipola maleje odwrotnie proporcjonalnie do sześcianu odległości.

Wzór (11) zastosować możemy tak dla cewki z realnym prądem, jak i do opisu pola krótkiego magnesu, będącego też zbiorem atomowych momentów magnetycznych tworzących wypadkowy moment  $\mu$ .



**Rys. 5.** Linie sił pola dla dipola magnetycznego (magnesu ferrytowego)

Poza osią symetrii dipola (magnesu) charakter linii sił jest bardziej złożony (rys. 5), niemniej w każdym kierunku pole dipola maleje proporcjonalnie do sześcianu odległości. Aby doświadczalnie sprawdzić prawo  $B \propto z^{-3}$ , zlogarytmujemy obustronnie wzór (11)

$$\ln B = \ln \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} - 3 \ln z. \quad (12)$$

Wykres  $\ln B$  w funkcji  $\ln z$  powinien być prostą, której parametry wyznaczają doświadczalną wartość wykładnika potęgowego przy  $z$  i wartość momentu magnetycznego magnesu  $\mu$ .