

Ćwiczenie 13

Współczynnik lepkości

Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z własnościami cieczy lepkiej, wyznaczenie współczynnika lepkości metodą spadania kulki (metodą Stokesa).

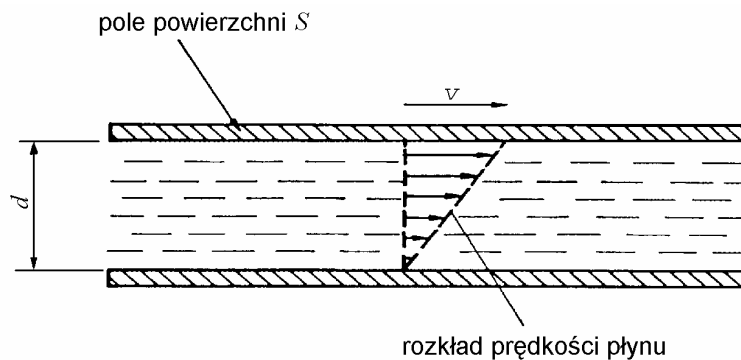
Wprowadzenie

Przy przepływie wszystkich cieczy rzeczywistych ujawniają się większe lub mniejsze siły tarcia. W przeciwieństwie do ruchu ciał stałych, w którym tarcie występuje tylko na powierzchni, w cieczech i w gazach ujawnia się ono w całej objętości. Jest więc zwane tarcem wewnętrznym lub lepkością.

Przypuśćmy, że mamy dwie płaskie płytki o powierzchni S , a pomiędzy nimi ciecz, jak to przedstawiono na rysunku 1. Jeżeli jedna z płytek będzie się poruszać względem drugiej z niewielką prędkością v , to siła potrzebna do podtrzymania ruchu będzie proporcjonalna do powierzchni S i prędkości v , a odwrotnie proporcjonalna do odległości płytek d

$$F = \eta \frac{Sv}{d}. \quad (1)$$

Stałą η nazywamy współczynnikiem lepkości. Jednostką η w układzie SI jest $[\text{Pa}\cdot\text{s}]$.



Rys. 1. Rysunek pomocniczy do definicji współczynnika lepkości

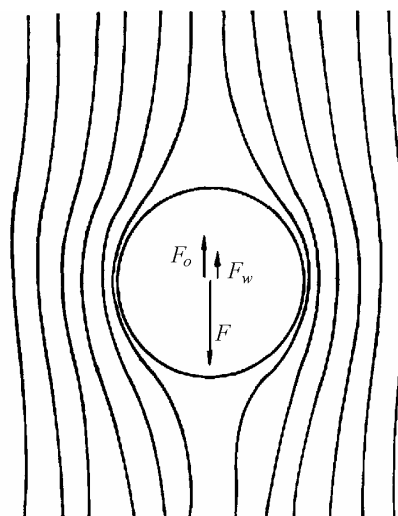
Zjawisko lepkości wykazują wszystkie ciecze i gazy. (Jednym dość szczególnym wyjątkiem jest ciekły hel, który w temperaturach bliskich zera bezwzględnego wykazuje zjawisko nadciekłości czyli zupełne zniknięcie lepkości.) Lepkość zależy w dużym stopniu od temperatury. Dla gazów rośnie proporcjonalnie do temperatury bezwzględnej. Dla cieczy zmniejsza się znacznie ze wzrostem temperatury. Bardzo silną zależność temperaturową obserwuje się dla cieczy o dużej lepkości jak np. dla gliceryny (patrz dane w tabeli 1) czy dla olejów silnikowych.

Tabela 1. Wybrane wartości współczynnika lepkości

Rodzaj cieczy	η [Pa·s]
powietrze	$18,5 \cdot 10^{-6}$
eter etylowy	0,00012
woda (20°C)	0,00100
gliceryna (0°C)	135
gliceryna (20°C)	1,945
gliceryna (30°C)	0,629
gliceryna(20°C, 2% wody)	0,971
olej z oliwek	0,084

Spadanie kuli w cieczy lepkiej w zakresie opływu laminarnego

Lepkość płynów (cieczy i gazów) jest odpowiedzialna za występowanie oporów ruchu ciała poruszającego się w płynie. Trajektorie cząstek cieczy wokół poruszającej się kuli przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Spadanie kulki w cieczy lepkiej

Jest to przykład opływu laminarnego, występującego przy małych prędkościach, kiedy ciecz opływająca kulę nie tworzy jeszcze żadnych wirów czy turbulencji. W analogii do równania (1) siła oporu lepkiego działającego na dowolny przedmiot w zakresie opływu laminarnego jest proporcjonalna do współczynnika lepkości i prędkości kuli. Siłę oporu ruchu działającą ze strony cieczy na poruszającą się w niej kulkę wyraża wzór Stokesa*

$$F = 6\pi\eta r v , \quad (2)$$

gdzie v oraz r oznaczają, odpowiednio, prędkość i promień kulki.

* G.G. Stokes (1819–1903), fizyk i matematyk angielski. W kursie matematyki poznajemy twierdzenie Stokesa dotyczące całek krzywoliniowych i powierzchniowych.

Wzór ten jest słuszny, gdy kulka porusza się w nieograniczonej objętości cieczy. W przypadku, gdy ruch kulki odbywa się wzdłuż osi cylindra o promieniu R wzór (3) przybiera postać

$$F = 6\pi\eta r v \left(1 + 2,4 \frac{r}{R} \right). \quad (3)$$

Jeśli kulka spada w cieczy pod wpływem grawitacji (rys. 2), to działają na nią trzy siły:

- a) $F = m g$ – (wartość siły ciężkości?) siła ciężkości,
- b) $F_w = m_w g = \rho V g$ – siła wyporu Archimedeasa, gdzie: ρ – gęstość cieczy, V – objętość kulki,
- c) $F_o = K v$ – siła oporu (siła Stokesa), gdzie $K = 6\pi\eta r \left(1 + 2,4 \frac{r}{R} \right)$.

Zgodnie z II zasadą dynamiki równanie ruchu kulki ma postać

$$ma = F - F_w - F_o, \quad (4a)$$

lub

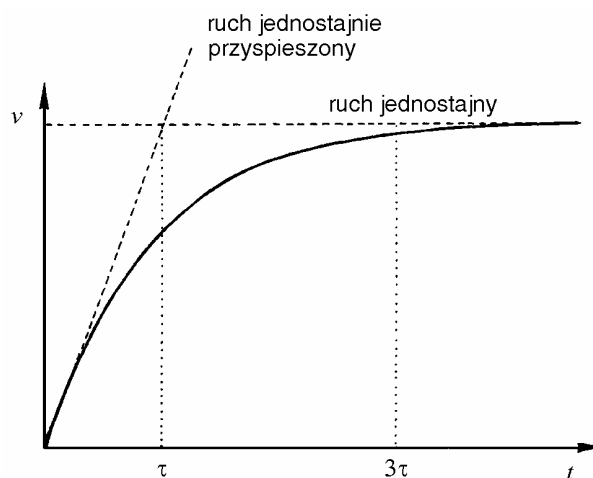
$$m \frac{dv}{dt} = F - F_w - K v. \quad (4b)$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu ze względu na prędkość v .

Jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ prędkość $v = v_0$, to po scałkowaniu dostajemy zależność prędkości od czasu w postaci

$$v(t) = v_{gr} + (v_0 - v_{gr}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (5)$$

gdzie wielkość $\tau = m/K$ nazywamy stałą czasową. Zależność prędkości od czasu (wzór (5)) dla kulki poruszającej się w cieczy lepkiej przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Zależność $v(t)$ dla kulki rozpoczynającej ruch w cieczy lepkiej z prędkością początkową $v_0 = 0$

Wyraz $(v_0 - v_{gr})\exp(-t/\tau)$ po prawej stronie wzoru maleje eksponencjalnie z czasem, więc dla dostatecznie dużego t jest on zanedbywalnie mały. Skutkiem tego ruch kulki po czasie rzędu 3τ staje się jednostajny z prędkością graniczną równą

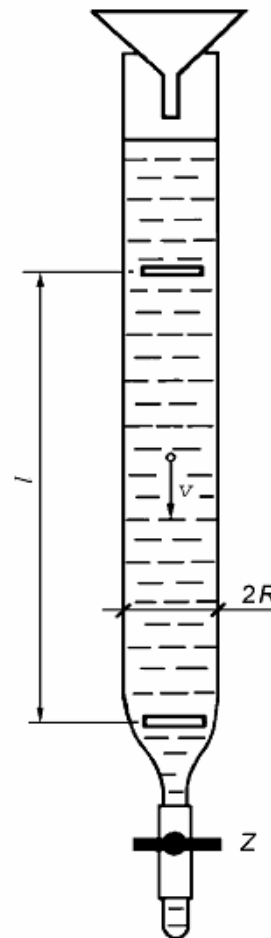
$$v_{gr} = \frac{F - F_w}{K} = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi\eta r \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (6)$$

Pomiar prędkości spadania kulki w cieczy stanowi jedną z metod wyznaczania współczynnika lepkości cieczy. Droga jaką przebędzie kulka przed osiągnięciem prędkości granicznej wynosi około $3\tau v_{gr}$. Pomiar prędkości granicznej wykonać należy na odcinku drogi (rys. 4), na której kulka osiągnęła już ustaloną prędkość. Ze wzoru (6) otrzymujemy

$$\eta = \frac{(m - \rho V)g}{6\pi r v_{gr} \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (7)$$

Wyznaczenie lepkości metodą Stokesa polega na bezpośrednim pomiarze wszystkich wielkości występujących po prawej stronie wzoru (7). Schemat aparatury przedstawia rys. 4. Badana ciecz znajduje się w szklanym cylindrze. Od góry wrzuca się kulki i mierzy czas opadania t na odcinku l . Zatem prędkość spadania $v = l/t$.

Rys. 4. Pomiar współczynnika lepkości metodą Stokesa



Pomiary obiektów okrągłych, wykonywane przy pomocy suwmiarki, śruby mikrometrycznej, czy innych przyrządów, dają z reguły nie promień, ale średnicę. Wygodnie jest zastąpić w równaniu (7) promienie r i R przez $d/2$ oraz $D/2$, zaś objętość kulki wyrazić jako $V = (4/3)\pi r^3 = (1/6)\pi d^3$. Otrzymujemy w ten sposób wzór roboczy

$$\eta = \frac{(m - \pi \rho d^3 / 6) g t}{3 \pi l d \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)} \quad (8)$$

wyrażający współczynnik lepkości przez wielkości mierzone bezpośrednio: m , d , D , l , t oraz wzięte z tablic wartości ρ i g .

Zakres stosowalności wzoru Stokesa

Wzór Stokesa jest słuszny tylko dla przepływów laminarnych. Parametrem, który decyduje o charakterze opływu cieczy wokół ciała jest liczba Reynoldsa, dana wzorem ogólnym

$$\text{Re} = \frac{v l \rho}{\eta}, \quad (9)$$

gdzie:

ρ – gęstość cieczy,

l – wymiar liniowy poruszającego się ciała mierzony w kierunku prostopadłym do wektora v . W przypadku kulki przyjmujemy $l = 2r$.

Jak dotąd nie ma teorii pozwalającej w sposób ścisły opisać odstępstwa od wzoru Stokesa ze wzrostem liczby Reynoldsa. Badania doświadczalne wskazują, że odstępstwa pojawiają się już dla $\text{Re} < 1$, i narastają w sposób ciągły tak, że niesposób podać określoną wartość liczby Reynoldsa, poniżej której wzór Stokesa jest w pełni dokładny. Jest to sytuacja odmienna od przypadku przepływu cieczy przez rurę, kiedy to ostre przejście od przepływu laminarnego do turbulentnego pojawia się dopiero przy $\text{Re} \cong 2000$.

Ze względu na ograniczony zakres stosowalności wzoru Stokesa, metoda spadania kulki nadaje się do wyznaczania η dla cieczy o stosunkowo dużej lepkości. Badaną cieczą jest gliceryna, niepalny związek organiczny $\text{CH}_2\text{OH}-\text{CHOH}-\text{CH}_2\text{OH}$. Jej lepkość silnie zależy od temperatury i nawet niewielkiego dodatku wody (tab. 1, s. 83). Stosowana jest m.in. w płynach chłodniczych i hamulcowych w samochodach jako składnik obniżający temperaturę krzepnięcia.

Literatura

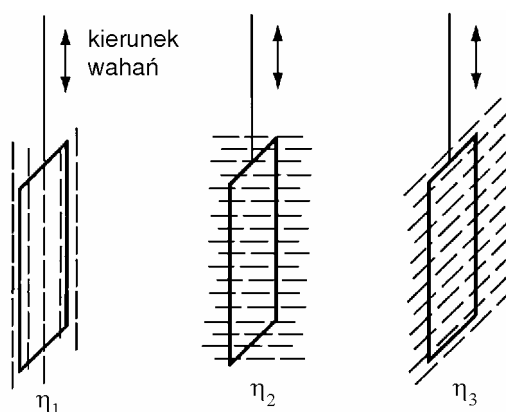
1. Problem laminarności opływu i inne aspekty zjawiska ruchu kulki w cieczy omawiane są w podręczniku: Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A.: *Wstęp do fizyki*. Warszawa, PWN 1976.
2. Ogólny opis zjawiska przejścia od przepływu laminarnego do wirowego i turbulentnego oraz teoria liczby Reynoldsa podane są m.in. w podręczniku: Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.: *Feynmana wykłady z fizyki. T. II. Cz. 2*. Warszawa, PWN 1970, 2001.
3. Marian Mięśowicz. *Życie i dzieło*. Praca zbiorowa pod red. A. Zalewskiej. Polska Akademia Umiejętności, Kraków 2007.

Dodatek historyczny. Odkrycie anizotropii współczynnika lepkości

Współczynnik lepkości zwykłych cieczy jest skalarem, tj. wielkością bezkierunkową. Anizotropia współczynnika lepkości występuje w cieczach anizotropowych, jakimi są ciekłe kryształy.

Anizotropię lepkości ciekłych kryształów odkrył około 1933 roku Marian Mięśowicz (1907–1992), asystent prof. Jeżewskiego w Katedrze Fizyki ówczesnej Akademii Górniczej. Pomiary wykonał dla p-azyksoanizolu (PAA), którego wydłużone cząsteczki tworzą w zakresie temperatur od 118°C do 135°C jeden z najprostszyc ciekłych kryształów. Współczynnik lepkości wyznaczył z pomiaru tłumienia drgań cienkiej płytki szklanej zanurzonej w prostopadłościennym naczyniu z ciekłym kryształem (rys. 5). Zastosowany układ stanowił dobre przybliżenie geometrii idealnej (por. rys. 1), jakiej używa się do definicji współczynnika lepkości.

Przy użyciu pola magnetycznego można zorientować osie cząsteczek ciekłego kryształu wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych kierunków (rys. 5).



Rys. 5. Schemat doświadczenia Mięśowicza

Dla każdego z nich wartość współczynnika lepkości jest inna. Tak określone η_1 , η_2 , η_3 noszą w literaturze naukowej nazwę współczynników lepkości Mięśowicza (*Miesowicz viscosity coefficients*).

Synteza związków będących ciekłymi kryształami w temperaturze pokojowej umożliwiła wynalazek displejów ciekłokrystalicznych. Elementy te, stosowane w zegarkach, cyfrowych przyrządach pomiarowych, kalkulatorach i komputerach przenośnych, charakteryzują się płaską budową i znikomym poborem mocy. Lepkość ciekłych kryształów pozostaje jednym z czynników ograniczających szybkość działania tych urządzeń.

Po wojnie prof. Mięśowicz prowadził badania promieni kosmicznych, cząstek elementarnych i zastosowań fizyki jądrowej. Był inicjatorem powstania i długoletnim dyrektorem Instytutu Fizyki i Techniki Jądrowej. Instytut ten, po przeprowadzce do budynku przy ul. Reymonta 19 i po połączeniu z Zakładem Fizyki Ciała Stałego Wydz. Metalurgii, przekształcił się w r. 1991 w Wydział Fizyki i Techniki Jądrowej, przemianowany w r. 2004 na Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej.