Ćwiczenie zerowe: *Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego „g” z wykorzystaniem wahadła matematycznego*

Rolę wahadła matematycznego odegra w tym przypadku mały ciężarek zawieszony na nierozciągliwej i cienkiej (o znikomej wadze) nici, której długość jest znacząco większa w porównaniu z rozmiarami ciężarka. Przyspieszenie ziemskie wyznaczymy znając wzór na okres drgań wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{czyli} \qquad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

przy czym T to okres drgań (czas od maksymalnego wychylenia w jedną stronę, np. w lewo, poprzez wychylenie maksymalne w prawo i z powrotem w lewo), L to długość wahadła (odległość od miejsca zawieszenia nici do środka ciężkości zawieszonego ciężarka), zaś g jest przyspieszeniem ziemskim, którego wartość to spodziewane 9,811 m/s^2 dla Krakowa. Przyspieszenie ziemskie wyznaczymy na dwa sposoby.

SPOSÓB PIERWSZY

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{czyli} \qquad \boldsymbol{g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}} \quad \text{(wzór roboczy)}$$

Zmierzmy więc długość wahadła $L =$ ………………………… (pamiętaj o jednostce!)

Najmniejsza działka przyrządu to $\Delta L =$ ………………………… (też pamiętaj o jednostce!)

Co przyjąć za **niepewność maksymalną** $u(L)$ (czyli dotyczącą pomiaru L)? – Może to być najmniejsza działka przyrządu albo więcej, jeśli uznamy, że nie jesteśmy na tyle pewni wyznaczonej długości.

Przyjmuję zatem $u(L) =$ ………………………… (jedn.!) (jest to niepewność typu *B* dotycząca pojedynczego pomiaru)

(Jeśli oprócz działki przyrządu nie mamy żadnych dodatkowych informacji to możemy przyjąć *niepewność standardową (typu B)* pomiaru długości $u_B(L) = \Delta L =$ ………………………………… (jedn.!))

Można też określić **niepewność względną** pomiaru długości wahadła: $\frac{u_B(L)}{L} =$ ………………………………(jednostki brak!)

Następnie mierzymy czas trwania 10 okresów (10 pełnych wahnięć), po czym przeliczamy je na czas jednego okresu i obliczamy średni okres oraz jego **niepewność standardową (typu A** - czyli dla serii pomiarów).

Numer pomiaru	Czas 10 okresów	Czas 1 okresu	Kwadrat odchyłki od średniej
i	$10\,T_i$ [s]	T_i [s]	$(T_i - T_{śr})^2$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
$N = 10$		$T_{śr} =$	$\sum_{i=1}^{10}(T_i - T_{śr})^2 =$

Średni okres: $\boldsymbol{T_{śr}} =$

Niepewność standardową $u_A(T_{śr})$ (średniego okresu z pomiaru wielokrotnego) liczymy z wzoru:

$$u_A(T_{śr}) = \sqrt{\frac{\sum(T_i - T_{śr})^2}{N(N-1)}} =$$

(sumę kwadratów odchyłek dzielimy przez

liczbę pomiarów N mnożoną przez N-1)

(następnie z całości wyciągamy pierwiastek)

Niepewność standardowa średniego okresu jest więc równa:

$u_A(T_{śr}) =$ ……………………… s

Niepewność względna średniego okresu: $\frac{u_A(T_{śr})}{T_{śr}} =$ …………………….. (jednostki brak!)

Obliczamy przyspieszenie ziemskie: $g = \frac{4\pi^2 L}{T_{śr}^2} =$ ………………………………… (właściwa jednostka!)

Aby obliczyć niepewność tak wyznaczonego przyspieszenia skorzystamy z prawa przenoszenia **niepewności względnej** lub bezpośrednio z prawa **przenoszenia niepewności**.

Z prawa przenoszenia niepewności względnej : $\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_\mathrm{B}(L)}{L}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_\mathrm{A}(T_{śr})}{T_{śr}}\right)^2} =$ ....

czyli $\quad u(g) = \boldsymbol{g} \cdot \sqrt{\left(\frac{u_\mathrm{B}(L)}{L}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_\mathrm{A}(T_{śr})}{T_{śr}}\right)^2} =$ .... ≈ ....

Lub z prawa przenoszenia niepewności o ogólnym wzorze $u(g) = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} u(x_k)\right)^2}$, co w tym przypadku ($k$=2)

daje $\quad u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} u(L)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u(T_{śr})\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{{T_{sr}}^2} u(L)\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 L}{{T_{sr}}^3} u_A(T_{śr})\right)^2} =$ ....≈ ....

Odpowiednio zaokrąglamy niepewność i wartość: $\boxed{\boldsymbol{g} = \qquad\qquad, \ \boldsymbol{u(g)} = \qquad\qquad}$

SPOSÓB DRUGI

Tym razem wyznaczymy przyspieszenie ziemskie mierząc okresy drgań dla różnych długości wahadła.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ możemy ten wzór przekształcić i zapisać jako zależność liniową $\boldsymbol{T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L}$ (wzór roboczy)

przy czym T to okres drgań, L to długość wahadła, zaś g jest przyspieszeniem ziemskim.

Mierzymy więc długość wahadła i wpisujemy do tabeli, po czym mierzymy czas trwania 10 okresów i również wpisujemy do tabeli. Z uwagi na brak czasu, dla każdej z trzech różnych długości wahadła, mierzymy tylko trzykrotnie czas trwania 10 okresów. Jako czwarty zestaw danych wykorzystamy dane z pomiarów pierwszym sposobem.

Numer pomiaru	Długość wahadła	Czas 10 okresów	Czas 1 okresu	Średni okres dla danego L	Kwadrat okresu
i	L_i[cm]	$10\,T_i$ [s]	T_i [s]	T_{isr} [s]	$T_i{}^2$[s^2]
1					
1				T_1 =	T_1^2 =
1					
2					
2				T_2 =	T_2^2 =
2					
3					
3				T_3 =	T_3^2 =
3					
4 z poprzedniej części ćw.				T_4 =	T_4^2 =

Typ zależności liniowej:
$y = Ax + B$
W tym przypadku:
$y \rightarrow T^2 \quad x \rightarrow L \quad A \rightarrow \frac{4\pi^2}{g}$
$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$
Mamy 4 zestawy danych y i x:
T_1^2 i L_1
T_1^2 i L_1
T_1^2 i L_1
T_1^2 i L_1

Wykorzystując te cztery punkty o współrzędnych (L_i ,T_i^2) (warto pamiętać, aby wpisywać do Excel-a dane w odpowiednio zamienionych jednostkach podstawowych – tu w metrach i sekundach do kwadratu) oraz funkcję REGLINP programu Excel dopasujemy do punktów prostą regresji $T_i^2 = A \cdot L_i + B$; czyli program Excel zwróci nam wartości parametrów prostej A i B, a także ich niepewności $u(A)$ i $u(B)$. Dla nas ważne będzie A i $u(A)$.

Otrzymany współczynnik A = ... (jednostka – znajdziemy ją posiłkując się informacją, że współczynnik kierunkowy prostej to tangens kąta nachylenia czyli w tym przypadku $\Delta T^2/\Delta L$)

$u(A)$ = ... (jednostka! – taka sama jak powyżej)

Ponieważ $A = \frac{4\pi^2}{g}$, stąd wyliczymy, że $g = \frac{4\pi^2}{A}$ = ... (jedn.!)

Niepewność obliczymy z prawa przenoszenia niepewności (co w tym przypadku będzie dość prostym wzorem, ponieważ jedyną wielkością obdarzoną niepewnością jest dopasowany współczynnik A):

$u(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{-A^2}\right)^2 \left(u(A)\right)^2} = \frac{4\pi^2 u(A)}{A^2} =$ .... (jedn.) ≈ .... (jedn.)

Odpowiednio zaokrąglamy niepewność i wartość: $\boxed{\boldsymbol{g} = \qquad\qquad, \ \boldsymbol{u(g)} = \qquad\qquad}$

Wnioski: