WSTĘP DO TEORII LICZB – ZADANIA

Liczby harmoniczne

Zad.1 Problem stosu kart (por. [Knuth], lub pełny tekst $\Longrightarrow$ tutaj)

Jak zmieni się ten problem, jeżeli w środku najwyższej kartu stosu cegieł, z których masa każdej to 1kg, położymy „punktowy" (ew. „liniowy") ciężarek o masie 100 kg?

Zad.2 Problem dzielnego robaczka (por. [Knuth], lub pełny tekst $\Longrightarrow$ tutaj)

Zad.3 wykaż

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n.$$

Zad.4 wykaż (por. [Knuth]

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

a także

$$\ln n < H_n < \ln n + 1.$$

Zad.5 Liczby harmoniczne (p)-ego rzędu to

$$H_n{}^{(p)} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}; \quad \lim_{n\to\infty} H_n{}^{(p)} = \zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Zad.6 Wykaż, że

$$\ln n = (H_n - 1) + \frac{1}{2}\left(H_n{}^{(2)} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(H_n{}^{(3)} - 1\right) + \ldots + \frac{1}{k}\left(H_n{}^{(k)} - 1\right).$$

(por. [Knuth]).

Zad.7 (por. [Knuth]) wykaż, że $1979 \mid$ licznik sumy

$$\sum_{k=1}^{1319} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Zad.8 Wykaż

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{k} = \frac{1}{2}\left(H_n{}^2 + H_n{}^{(2)}\right)$$

i w oparciu o ten wzór spróbuj wykazać

$$\sum_{k=1}^{n} H_k{}^2 = (n+1)H_n{}^2 - (2n+1)H_n + n.$$

(por.[Knuth])