PODSTAWY TEORII LICZB – ZADANIA

Zestaw nr.1: Wstęp do teorii liczb

Zad.1 Wykaż, że dla $\forall n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

(a) $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$; **wsk.:** rozpatrz reszty z dzielenia – osobno dla $n = 2k$ i $n = 2k + 1$.
(b)$13 \mid n^{13} - n$. **wsk.:** Indukcja

Zad.2 Niech $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$ oraz ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = {a_4}^2$. Wykaż, że przynajmniej dwie z liczb a_i są parzyste.

wsk.: przeanalizuj wszystkie możliwe przypadki (nie)parzystości.

Zad.3 Oblicz: a) $(n, n + 1)$; (b) $(n, n + 2)$; (c) $(m + 2n, 2m + n)$, $(m.n) = 1$.

Zad.4 Trzy liczby całkowite tworzą trójkę pitagorejską :$x^2 + y^2 = z^2$. Wykaż, że $60 \mid xyz$.

wsk.: Każdą liczbę możemy zapisać jako jedna z trzech: $3k, 3k + 1, 3k + 2$.

Zad.5 Wykaż, że dla $m, n \in \mathbb{N}$ i $9 \mid m^2 + mn + n^2$ zachodzi $3 \mid n$ i $3 \mid m$.

Zad.6 Udowodnij, że ułamek

$$\frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$$

jest liczbą całkowitą i przedstaw go jako iloczyn dwóch liczb.

Zad.7 Niech x, y będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że liczba $2(25x + 3y)$ jest podzielna przez 41 wtedy i tylko wtedy gdy liczba $3x + 2y$ jest podzielna przez 41.

Zad.8 [Kourl 01] zad. 3 i 4

(a) Do liczby 2-cyfrowej dopisano „od prawej" tę samą liczbę. Ile razy zwiększyła się wyjściowa liczba?

(b) Znajdź wszystkie liczby 2-cyfrowe podzielne przez iloczyn swoich cyfr.

Uwaga: Taką liczbę ab zapisujemy $10a + b$ albo $\overline{ab}$, żeby uniknąć wątpliwości czy to nie jest $a \cdot b$.

Zad.9 [Kourl 01] zad. 8
Znajdź wszystkie liczby 3-cyfrowe $\overline{abc}$, których kwadrat kończy się cyframi $\overline{abc}$.

Zad.10 [Kourl 01] zad. 11, 16,20

(a) Znajdź liczbę 4-cyfrową, która jest cztery razy mniejsza od liczby napisanej wspak.

(b) Liczbę 5-cyfrową o wszystkich cyfrach różnych pomnożono przez 4 i dostano liczbę napisaną wspak. Jaka to liczba?

(c) Liczba 6-cyfrowa, po pomnożeniu przez 2, 3, 4, 5 lub 6 zapisuje się tymi cyframi, ale ustawionymi w innym porządku. Jaka to liczba?

(wskazówka: łatwo dość wykazać, że wszystkie cyfry muszą być różne i nie może tam być cyfry zero.)

Zad.11 [Kourl 01] zad. 35

Trudne. Utwórz z wszystkich dziesięciu cyfr 0 – 9 liczbę 10-cyfrową, taką, że liczba utworzona z jej pierwszych dwóch cyfr dzieli się przez 2, z pierwszych trzech – przez 3, i tak dalej. Liczba jest więc podzielna przez 10.

Zad.12 [Kourl 01] zad.50

Liczba N jest kwadratem liczby całkowitej i nie kończy się zerem. Po wykreśleniu z tej liczby dwóch ostatnich cyfr znowu otrzymujemy kwadrat liczby całkowitej (np. 121, 441, 961). Znajdź – z rozważań ogólnych – największa taką liczbę.

Zad.13 [Kourl 01] zad. ,53,57,58

(a) Wykaż, że nie istnieje taka liczba, która po zamianie miejscami swojej cyfry pierwszej i ostatniej wzrasta 5-krotnie.

(b) Czy liczba naturalna w której zapisie występują same szóstki i zera może być kwadratem?

(c) Znajdź liczbę 4-cyfrową, będącą kwadratem, która ma jednakowe dwie pierwsze i dwie ostatnie cyfry.

Zad.14 [Kourl 01] zad. 70,72,83,97

(a)Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots00}_{1997}1$ jest złożona.

(b) Liczbę 5-cyfrową A zapisujemy przy pomocy samych dwójek i trójek, a liczbę 5-cyfrową B – samych trójek i czwórek.

Czy iloczyn AB można zapisać przy pomocy samych dwójek?

(c) Suma cyfr liczby naturalnej n to $\sigma(n)$. Czy istnieje liczba n dla której $n + \sigma(n) = 1999$?

(d) Znajdź wszystkie liczby 3-cyfrowe, które pomnożone przez liczby napisane wspak dają kwadrat liczby naturalnej.