



Wykład 7

Całkowanie numeryczne

1. Całkowanie przy użyciu funkcji quad

Matlab daje użytkownikowi możliwość obliczania całek za pomocą funkcji wbudowanych: **quad**, **quadl** oraz **quad8**. Pierwsza z nich opiera się na metodzie Simpsona niskiego rzędu (rzęd jest dobierany w zależności od całkowanej funkcji), druga wykorzystuje tzw. kwadraturę Lobatto, zaś trzecia kwadraturę Newtona-Cotesa ósmego rzędu. Dwie ostatnie metody są znacznie dokładniejsze od metody Simpsona.

2. Kwadratury tworzone przez użytkownika

W Matlabie, jak w każdym innym języku programowania, można tworzyć skrypty obliczające całki oznaczone, korzystając ze znanych metod: prostokątów, trapezów, parabol (Simpsona) i wielu innych.

2.1. Metoda prostokątów

Metoda wykorzystuje aproksymację funkcji podcałkowej wielomianem stopnia zerowego, czyli odcinkami funkcji stałej. Algorytm jest następujący:

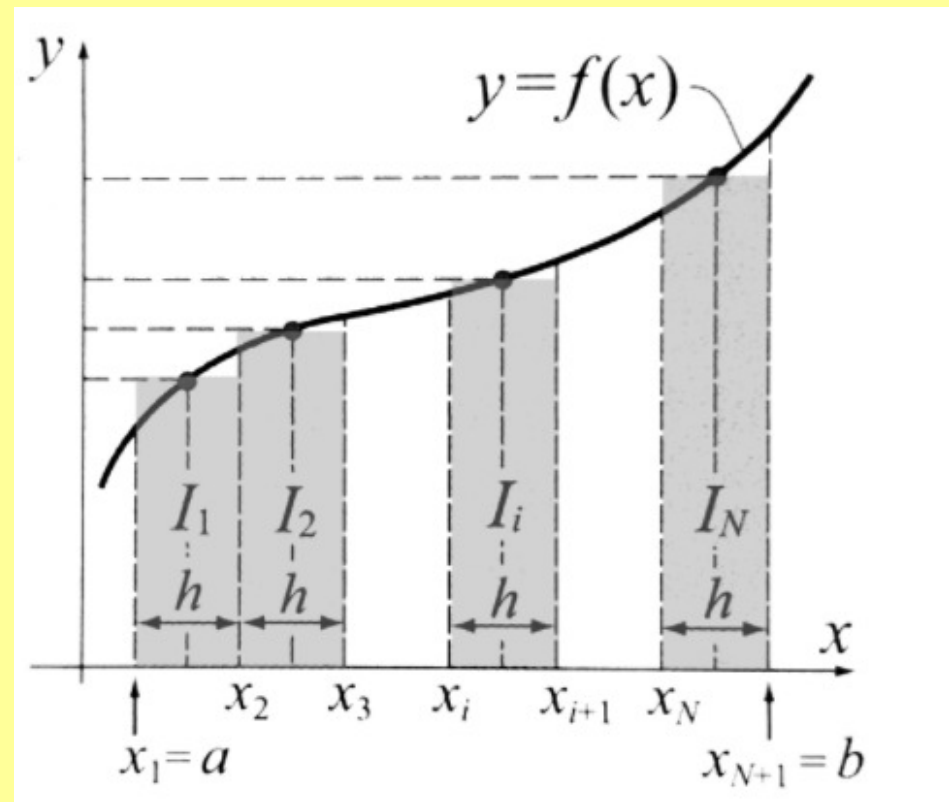
-przedział całkowania $[a,b]$ dzielimy na n równych odcinków, każdy o długości $h=(b-a)/n$

-obliczana jest wartość w funkcji w środku każdego przedziału

-przybliżona wartość całki obliczana jest przez zsumowanie pól powierzchni wszystkich prostokątów, których boki wynoszą h i f_i .

$$\int_a^b f(dx) \approx h \sum_{i=1}^n f_i$$

gdzie $f_i = f\left(a + \frac{(2i-1)h}{2}\right)$



2.2. Metoda trapezów

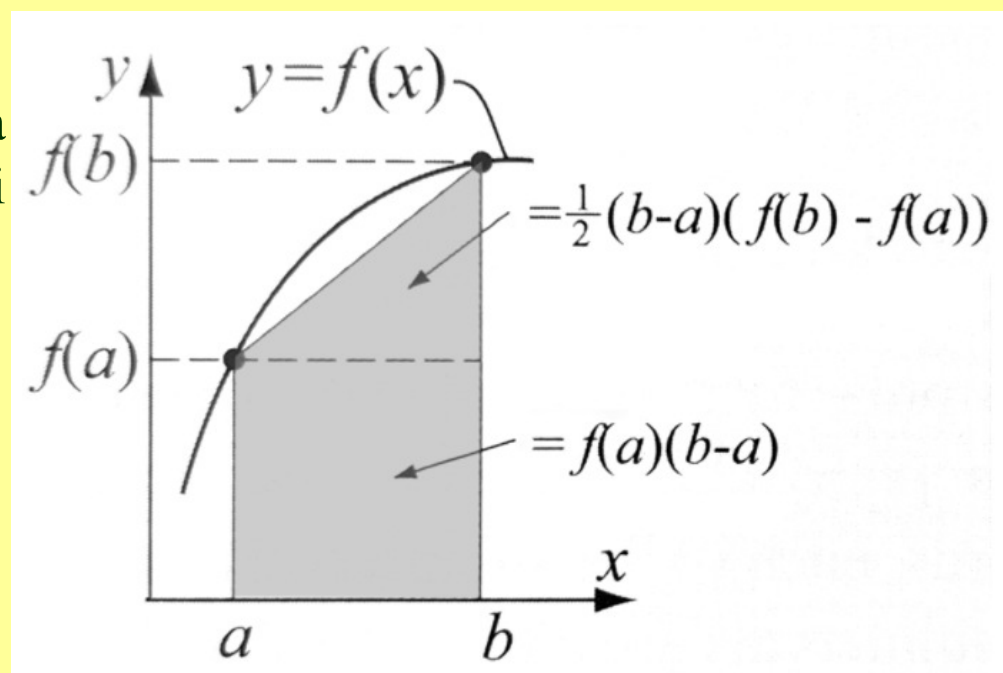
Metoda wykorzystuje aproksymację funkcji podcałkowej wielomianem pierwszego stopnia, czyli funkcją kawałkami liniową. Algorytm jest następujący:

-przedział całkowania $[a,b]$ dzielimy na n równych odcinków, każdy o długości $h=(b-a)/n$

-obliczana jest wartość w funkcji dla każdego z $n+1$ węzłów, które łączone są odcinkami

-przybliżona wartość całki obliczana jest przez zsumowanie pól powierzchni powstałych trapezów:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f_a}{2} + \sum_{i=2}^n f_i + \frac{f_b}{2} \right)$$



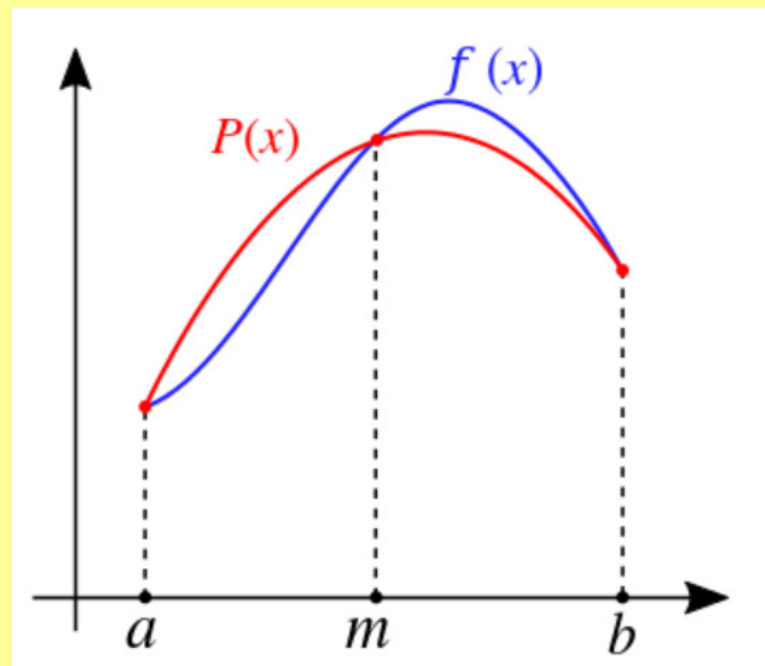
2.3. Metoda parabol (Simpsona)

W odróżnieniu od metody trapezów, gdzie funkcją aproksymującą była funkcja odcinkami liniowa, w metodzie parabol jest nią funkcja kwadratowa. Parabola jest dopasowywana do trzech wartości funkcji podcałkowej w równo oddalonych punktach.

Do obliczania wartości całki oznaczonej metodą parabol stosuje się następujący wzór:

$$\int_a^b f(dx) = \frac{1}{3} h \sum_{i=2}^{n/2} (f_{2i-1} + 4f_{2i} + f_{2i+1}) = \frac{1}{3} h [f_1 + 4(f_2 + f_4 + \dots + f_n) + 2(f_3 + f_5 + \dots + f_{n-1}) + f_{n+1}]$$

W tej metodzie ilość przedziałów musi być parzysta.





Przykład: Obliczyć wartość całki oznaczonej $\sin(x)dx$ w przedziale $[0, \pi/2]$ dla $n=4$.

Wynik dokładny: 1.00000

Wartość całki obliczona met.prostokątów: 1.00650

Wartość całki obliczona metodą trapezów: 0.98712

Wartość całki obliczona metodą Simpsona: 1.00010



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ