ABC matematyki dla początkujących fizyków.

<u>Całka</u>

■ całka nieoznaczona ■ całka oznaczona ■ interpretacja całki oznaczonej ■ całki niewłaściwe ■ metody całkowania ■ całka po krzywej dowolnej (całka krzywoliniowa) ■ całka po powierzchni (całka powierzchniowa) ■ całka po objętości (całka objętościowa)

1 Całka nieoznaczona

Całkowanie może być traktowane jako operacja odwrotną do różniczkowania. Definiujemy ją z grubsza w następujący sposób.
Operację całkowania funkcji jednej zmiennej $f(x)$ zapisujemy w postaci

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

przy czym w wyniku całkowania otrzymujemy taką funkcję $F(x)$, która po zróżniczkowaniu daje funkcję podcałkową $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

$F(x)$ nazywamy <u>funkcją pierwotną</u>. Zauważmy, że takich funkcji jest nieskończenie wiele, gdyż dodanie dowolnej stałej do $F(x)$ daje funkcję pierwotną równie dobrą jak $F(x)$ (bo pochodna stałej jest równa zero i $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$).

<u>Przykłady.</u>

1. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2. $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int 3e^{-2x} dx = -\frac{3}{2}e^{-2x} + C$
6. $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
7. $\int \sqrt{1-x}\,dx = -\dfrac{2}{3(1-x)\sqrt{1-x}} + C$

Sposobów całkowania jest wiele, nie ma jednej reguły. Można zgadnąc wynik, tak jak w powyższych przykładach. Czasem trzeba przekształcić wyrażenie podcałkowe, tak aby sprowadzić całkowanie do prostego przypadku, dla którego odpowiedź łatwo uzyskać.
Tak jest np. dla przykładu 7. W tym przypadku możemy podstawić za wyrażenie pod pierwiastkiem nową zmienną y: $y = 1 - x$.
Musimy także podstawić właściwe wyrażenie za dx, bo w całce x-ów już nie chcemy, musimy wszystko przedstawić za pomocą y-greków. W tym celu weźmy z równości $y = 1 - x$ obustronnie różniczkę. Mamy:
$dy = d(1-x) \;\; \rightarrow \;\; dy = -dx$.
Nasza całka ma więc postać:
$\int \sqrt{y}\,(-dy) = -\int \sqrt{y}\,dy = -\frac{2}{3}y^{3/2} = -\frac{2}{3(1-x)\sqrt{1-x}}$.
Oczywiście, należy dla uzyskania ogólnego rozwiązania dorzucić do wyniku stałą C.
Powyższy sposób nazywany jest metodą podstawiania.

2 Całka oznaczona

Całkę oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $[x_a, x_b]$ definiujemy jako różnicę wartości funkcji pierwotnej $F(x)$ dla górnej i dolnej granicy całkowania

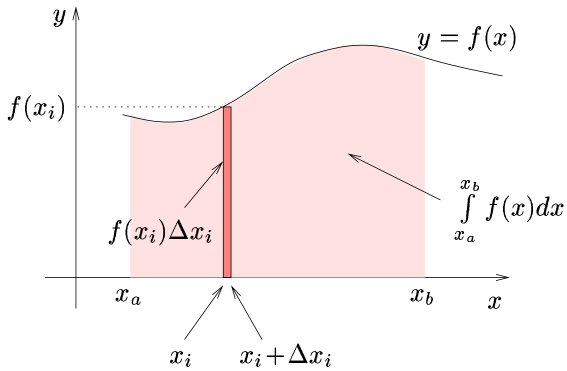
$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx = F(x_b) - F(x_a).$$

Prawą stronę często zapisujemy w postaci $F(x)\big|_{x_a}^{x_b}$.

Zauważ, że całka oznaczona w odróżnieniu od całki nieoznaczonej jest liczbą, a nie funkcją.

3 Interpretacja całki oznaczonej

Całka oznaczona $\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx$ jest liczbowo równa polu pod wykresem funkcji $f(x)$ w obszarze ograniczonym współrzędnymi x_a i x_b (patrz rys.).



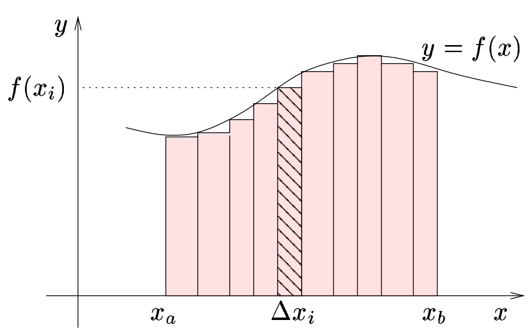
Aby pokazać że tak jest, podzielmy cały przedział całkowania $[x_a, x_b]$ na n małych podprzedziałów o szerokościach $\Delta x_i,\ i = 1, 2, \cdots n$. Iloczyn

$$f(x_i)\Delta x_i$$

przedstawia pole i-tego prostokąta o podstawie Δx_i i wysokości $f(x_i)$ (zakreskowany pasek na rysunku). Sumując pola wszystkich takich pasków w przedziale $[x_a, x_b]$ uzyskamy w przybliżeniu całe pole pod wykresem. Zapiszmy tę sumę:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

W rzeczywistości jest to pole pod wykresem linii łamanej, jak widać na poniższym rysunku.



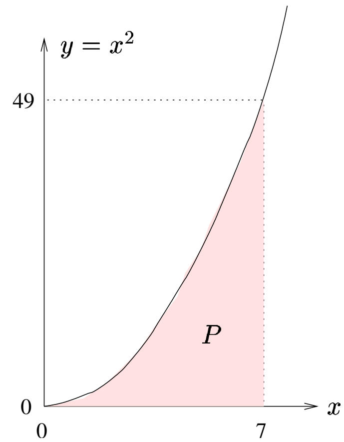
Obliczane pole jest tym bliższe polu pod krzywą $f(x)$ im drobniejszy będzie podział na fragmenty Δx. W granicy, przy $n \to \infty$ (czyli przy $\Delta x \to 0$) uzyskamy dokładną wartość pola pod wykresem $f(x)$.
Tę granicę zapisujemy zamieniając (we wzorze na sumę) skończoną wartość przyrostu Δx na nieskończenie mały przyrost dx (różniczka zmiennej x), a symbol sumy Σ zamieniamy symbolem $\int$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \to \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx.$$

Tak więc całkę oznaczoną $\int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx$ należy rozumieć jako sumę nieskończonej liczby pól $f(x)dx$ (czyli pól prostokącików o nieskończenie małej szerokości podstawy dx i wysokości $f(x)$), zaczynając sumowanie od początkowego punktu x_a, a kończąc na x_b (zmienna x przebiega wartości z przedziału $[x_a, x_b]$).

Przykład. Obliczymy pole pod wykresem paraboli zadanej równaniem $y = x^2$ w przedziale x-ów $0 \div 7$ (obszar zaznaczony na rysunku):

$P = \int_0^7 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\big|_0^7 = \frac{1}{3}(7^3 - 0^3) = 114.3.$



4 Całka niewłaściwa

Zdarza się, że mamy obliczyć całkę oznaczoną w przypadku gdy przedział całkowania jest nieskończony (jedna z granic całkowania to ∞ lub $-\infty$, ewentualnie obie granice są nieskończone: dolna $-\infty$, górna $+\infty$).
Bywa też, że granica całkowania jest skończoną liczbą ale funkcja podcałkowa jest nieograniczona w tym punkcie (mówimy, że funkcja ma "osobliwość" w tym punkcie).
W obu tych przypadkach całkę nazywamy niewłaściwą.

Przykłady:

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

W pierwszym przykładzie przedział całkowania jest nieskończony, w drugim – funkcja podcałkowa jest nieograniczona dla dolnej granicy całkowania (dąży do nieskończoności gdy $x \to 0$).
Całka niewłaściwa istnieje gdy istnieją granice funkcji pierwotnej na końcach przedziału całkowania. Zobaczmy jak to jest dla naszych przykładów:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

W następującym przykładzie

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

całka niewłaściwa nie istnieje. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w dolnej granicy (jest nieskończona dla $x = 0$). Funkcją pierwotną jest $\ln x$. Nie istnieje granica tej funkcji $\lim_{x\to 0}(\ln x)$. Funkcja $\ln x$ dąży do $-\infty$ gdy x dąży do zera. Mówimy, że taka całka jest "rozbieżna".

5 Metody całkowania

Zwykle staramy sie sprowadzić całkę do prostszej postaci, dla której wzór jest znany. Sposobów jest wiele, nie ma jednej reguły. Do najbardziej podstawowych i najczęściej stosowanych należą metoda podstawiania (zilustrowana przykładem w rozdziale 1) i całkowanie przez części.

W metodzie całkowania przez części posługujemy się regułą [1]

$$\int f\,dg = f\,g - \int g\,df,$$

gdzie $f = f(x)$ i $g = g(x)$ są funkcjami zmiennej x, a $df = f'(x)dx$ i $dg = g'(x)dx$ są różniczkami funkcji $f(x)$ i $g(x)$.

Przykład 1. Obliczyć całkę $\int x\cos x\,dx$.

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx = \\ = x\sin x + \cos x + C.$$

Sprawdź, że $(x\sin x + \cos x + C)'$ daje funkcję podcałkową $x\cos x$.

Przykład 2. Obliczyć całkę $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$.

Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną, a następnie wstawimy granice.

$$\int x^2e^{-x}dx = \int x^2d(-e^{-x}) = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx.$$

Teraz należy jeszcze raz zastosować całkowanie przez części do całki $\int 2xe^{-x}dx$.

$$\int 2xe^{-x}dx = \int 2xd(-e^{-x}) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx = \\ = -2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

Rezultat całkowania:

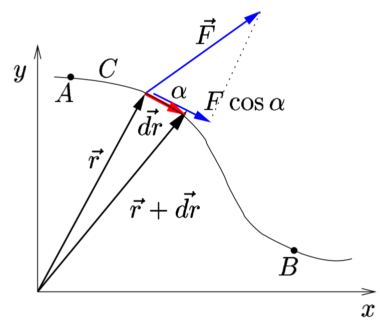
$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{5}{e} + 2.$$

[1] Podana reguła wynika ze wzoru na różniczkę iloczynu dwóch funkcji: $d(fg) = fdg + gdf$. Obustronne scałkowanie tej równości daje: $\int d(fg) = fg = \int fdg + \int gdf \quad\to\quad \int f\,dg = f\,g - \int g\,df$.

6 Całka krzywoliniowa

Niech C będzie krzywą w przestrzeni (przykładowo, może to być tor po którym przesuwa się ciało). Określa ją wektor wodzący $\vec{r}(x,y,z)$ (patrz tekst *Układy współrzędnych*). Dane jest też w przestrzeni x,y,z pole wektorowe $\vec{F}(x,y,z)$, czyli w każdym punkcie krzywej jest określony wektor $\vec{F}$, w ogólnym przypadku może się on zmieniać od punktu do punktu zarówno co do wartości jak i kierunku. Wektor $\vec{dr}$ przedstawia odcinek krzywej o nieskończenie małej długości.

Skoncentrujmy uwagę na wybranym punkcie krzywej pomiędzy A i B i utwórzmy iloczyn skalarny $\vec{F}\cdot\vec{dr} = F\cos\alpha\,dr$ (α jest kątem między $\vec{F}$ i $\vec{dr}$). $F\cos\alpha$ jest rzutem wektora $\vec{F}$ na styczną do krzywej w rozpatrywanym punkcie.



Całkę po krzywej C w granicach od punktu A do punktu B określamy jako sumę takich nieskończenie małych przyczynków $\vec{F}\cdot\vec{dr}$:

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_A^B F\cos\alpha\,dr.}$$

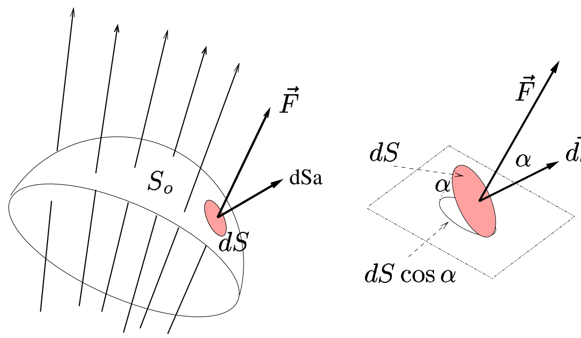
Przykładem sytuacji, w której trzeba posłużyć się całką krzywoliniową jest zagadnienie obliczania pracy wykonanej przez siłę $\vec{F}$ przy przesuwaniu ciała po zadanym torze. Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ na małym odcinku drogi $\vec{dr}$ wynosi $dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F\cos\alpha\,dr$. Cała praca:

$$W = \int_A^B F\cos\alpha\,dr$$

Jak widać z wzoru pracę wykonuje tylko składowa siły styczna do toru, praca składowej prostopadłej jest równa zeru!

7 Całka powierzchniowa

Zadane jest pole wektorowe $\vec{F}(x,y,z)$ oraz określona powierzchnia, nazwijmy ją S_o. W dowolnym miejscu na powierzchni wydzielmy nieskończenie mały jej element dS i umówmy się, że wektor $\vec{dS}$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni (zwróconym na zewnątrz) i mającym długość dS.



Tworzymy iloczyn skalarny $\vec{F}\cdot d\vec{S}$ i sumujemy takie nieskończenie małe przyczynki dla wszystkich punktów powierzchni. Jest to tzw. całka powierzchniowa

$$\boxed{\int\limits_{S_0} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int\limits_{S_o} F\cos\alpha\, dS.}$$

Zauważmy, że $dS\cdot\cos\alpha$ jest rzutem wycinka powierzchni dS na płaszczyznę prostopadłą do wektora $\vec{F}$.
Zmienną całkowania jest S, obszarem całkowania jest cała powierzchnia S_o. Powierzchnia jest tworem dwuwymiarowym, dlatego często całkę powierzchniową przedstawia sie przy pomocy dwóch symboli całki $\iint\limits_{S_o} \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

8 Całka objętościowa

Zadana jest w przestrzeni funkcja skalarna $f(x, y, z)$ i niech V_o będzie wydzieloną objętością w tej przestrzeni. Podzielmy cały obszar V_o na nieskończoną ilość elementarnych objętości dV. Dla poszczególnych punktów obszaru (o współrzędnych x, y, z) utwórzmy iloczyny $f(x, y, z)\, dV$, a następnie zsumujmy je wszystkie [2]. Ta procedura sumowania wyrażona jest całką, nazywaną całką objętościową

$$\boxed{\int\limits_{V_o} f(x, y, z)\, dV.}$$

Objętość jest tworem trójwymiarowym, zatem całkę objętościową przedstawia się często przy pomocy trzech symboli całkowania

$$\iiint\limits_{V_o} f(x, y, z)\, dV.$$

Zauważ, że w układzie kartezjańskim $dV = dx\, dy\, dz$ jest elementarną objętością, która przedstawia objętość nieskończenie małego prostopadłościanu o bokach dx, dy, dz.

Przykład. Obliczyć masę prostopadłościanu o zadanych wymiarach i zmiennej gęstości.

[2] zwróć uwagę, że dV jest otoczeniem konkretnego punktu (x, y, z)

Przyjmijmy osie układu kartezjańskiego x, y, z równolegle do krawędzi prostopadłościanu, a początek w jednym z narożników. Niech X, Y, Z będą odpowiednio długością, szerokością i wysokością prostopadłościanu. a Załóżmy, że gęstość prostopadłościanu jest zmienna i waraża sie następująco:

$$\rho(x, y, z) = \rho_o\, e^{-(x+2y+3z)},$$

przy czym ρ_o jest wielkością stałą.
Wielkość $\rho(x, y, z)\, dV = \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dx$ jest masą części prostopadłościanu o nieskończenie małej objętości dV, w otoczeniu punktu o współrzędnych (x, y, z). Zatem cała masa m jest sumą takich elementarnych mas, czyli całką

$$m = \int\limits_V \rho(x, y, z)\, dV = \int\limits_0^X \int\limits_0^Y \int\limits_0^Z \rho_o\, e^{-(x+2y+3z)}\, dx\, dy\, dz.$$

Teraz trzeba wykonać trzy całkowania (w dowolnej kolejności), odpowiednio po zmiennych x, y i z. Przykładowo, całkowanie po y daje:

$$\int\limits_0^Y \rho_o\, e^{-(x+2y+3z)}\, dy = -\tfrac{1}{2}\rho_o\, e^{-(x+2y+3z)}\Big|_0^Y = \tfrac{1}{2}\rho_o e^{-(x+3z)}(1 - e^{-2Y})$$

(zwróć uwagę, że x i z potraktowane zostały jako stałe podczas całkowania po y).
Teraz zostały jeszcze do wykonania dwa całkowania:

$$\int\limits_0^X \int\limits_0^Z \frac{1}{2}\rho_o e^{-(x+3z)}(1 - e^{-2Y})\, dx\, dz.$$

Dokończ samodzielnie obliczenia. Powinieneś uzyskać wynik

$$m = \frac{1}{6}\rho_o(1 - e^{-X})(1 - e^{-2Y})(1 - e^{-3Z}).$$

Przykład. Obliczyć masę kuli o promieniu R i gęstości zmieniającej się następująco: $\rho(r) = \rho_o\,(1 + \alpha r)$, gdzie r jest odległością od środka kuli a ρ_o i α są stałymi dodatnimi.
Tym razem mamy do czynienia z symetrią sferyczną: gęstość w ustalonej odległości r (czyli na sferze o promieniu r) jest wszędzie taka sama, niezależnie od kierunku. Dlatego jako objętość elementarną dV wygodnie jest obrać obszar ograniczony sferami o promieniach r i $r + dr$, ta objętość jest równa $dV = 4\pi r^2 dr$ (powierzchnia sfery $4\pi r^2$ razy jej grubość dr). Masa tej objętości jest równa $dm = \rho(r)dV$, a całkowita masa

$$m = \int\limits_m dm = \int\limits_V \rho(r)dV = \int\limits_0^R \rho_o\,(1 + \alpha r)4\pi r^2 dr.$$

W rozpatrywanym przykładzie funkcja podcałkowa (gęstość ρ) zależy tylko od jednej zmiennej, a więc obliczenie całki objętościowej wymaga jednego całkowania. Dokończ obliczenia.