ABC matematyki dla początkujących fizyków

Elementy analizy wektorowej

■ pole wektorowe i pole skalarne ■ różniczkowanie funkcji wektorowej ■ operator nabla ■ gradient, dywergencja, rotacja ■ gradient, laplasjan w układzie sferycznym ■ strumień pola wektorowego ■ krążenie ■ twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa ■ twierdzenie Stokes'a ■ natężenie pola wektorowego i potencjał

1 Pole wektorowe i pole skalarne

Jeśli w przestrzeni każdemu punktowi x, y, z przypisany jest wektor $\vec{f}(x, y, z)$ to mamy do czynienia z polem wektorowym. Wektor $\vec{f}$ możemy nazwać natężeniem pola. Linie styczne do wektorów pola nazywane są liniami pola.
Podobnie, jeśli punktom x, y, z przypiszemy funkcję skalarną $f(x, y, z)$ to mówimy o polu skalarnym.
Przykładami pierwszego jest pole prędkości $\vec{v}$ cząstek wody w rzece, czy pole siły grawitacji $\vec{F}(r)$. Przykładem pola skalarnego jest temperatura powietrza $T(x, y, z)$ w różnych punktach atmosfery.
Powierzchnia ekwiskalarna to miejsce geometryczne punktów w których funkcja skalarna $f(x, y, z)$ na taką samą wartość (np. powierzchnie na której temperatura wynosi wszędzie 10^oC). Równanie powierzchni ekwiskalarnej: $f(x, y, z) = const.$

2 Różniczkowanie funkcji wektorowej

Funkcja jednej zmiennej. W przypadku wektorowej funkcji jednej zmiennej, np. t, o składowych $f_x(t),\ f_y(t),\ f_z(t)$, obliczenie pochodnej wektora $\vec{f}(t)$ sprowadza się do obliczeniu pochodnych poszczególnych składowych

$$\frac{d}{dt}\vec{f} = \left(\frac{df_x}{dt}, \frac{df_y}{dt}, \frac{df_z}{dt}\right).$$

Różniczka $d\vec{f}$ jest wektorem określającym przyrost wektora $\vec{f}$, $d\vec{f} = \vec{f}(t + dt) - \vec{f}(t)$. Wyraża się on przez różniczki poszczególnych składowych

$$d\vec{f} = (df_x, df_y, df_z) = df_x\hat{\imath} + df_y\hat{\jmath} + df_z\hat{k}.$$

Przykład: Rozpatrzmy promień wodzący poruszającego się punktu czyli funkcję wektorową $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Pochodna: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$.
Różniczka: $d\vec{r} = (dx, dy, dz) = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$.

Funkcja wektorowa wielu zmiennych. Wiele takich funkcji spotykamy opisując zjawiska fizyczne. Często będzie to zależność od położenia (współrzędne x, y, z) i czasu (t). Na przykład: wektor prędkości cząstek wody w rzece zależy zarówno od położenia jak i od czasu. Mamy więc funkcję wektorową $\vec{v}(x, y, z, t) = \big(v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t)\big)$. Czasem zamiast $\vec{v}(x, y, z, t)$ pisze się skrótowo $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Współrzędne przestrzenne nie muszą być współrzędnymi układu kartezjańskiego, można stosować każdy inny.

Zarówno funkcje skalarne jak i wektorowe można różniczkować po dowolnej zmiennej (traktując pozostałe zmienne jako stałe) – jest to wtedy tzw. pochodna cząstkowa. Przykładowo, pochodną składowej x-owej wektora prędkości $v_x(x, y, z, t)$ po zmiennej z zapiszemy tak:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Pochodna cząstkowa całego wektora $\vec{v}$ po zmiennej z :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Podobnie oblicza się $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial x}, \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial y}$.

3 Operator nabla

Określamy go tak, że w zapisie matematycznym jest symbolicznym wektorem o trzech składowych, w związku z czym stosują sie do niego wszystkie reguły algebry wektorów, m.in. mnożenia. W układzie kartezjańskim wektor nabla wyraża się tak:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Taki operator (jak każdy operator) sam w sobie nie ma sensu, nabiera realnego sensu dopiero wtedy jeśli podziała na jakąś funkcję (skalarną lub wektorową). Należy przy tym pamiętać aby stawiać operator po lewej stronie obiektu na który ma działać.

Podnosząc do kwadratu operator ∇, czyli mnożąc skalarnie wektory $\nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, uzyskujemy inny ważny operator zwany operatorem Laplace'a, lub laplasjanem, oznaczanym symbolem ∇^2 lub $\triangle$. W układzie kartezjańskim:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplasjan jest jak widać operatorem skalarnym.

Działając operatorem nabla na funkcję zmiennych położenia x, y, z (formalnie – mnożąc funkcję przez wektor ∇) uzyskujemy trzy użyteczne funkcje:

$$\begin{array}{rl} \nabla f(x,y,z) & - \text{ gradient funkcji skalarnej } f \\ \nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) & - \text{ dywergencja funkcji wektorowej } \vec{f} \\ \nabla\times\vec{f}(x,y,z) & - \text{ rotacja funkcji wektorowej } \vec{f} \end{array}$$

4 Gradient funkcji

Wektor mnożony przez skalar jest dalej wektorem, a więc gradient funkcji, który obliczamy mnożąc wektor ∇ przez funkcję skalarną $f(x,y,z)$ jest wektorem. Zgodnie z regułą mnożenia wektora przez skalar gradient funkcji przedstawia się następująco

$$\nabla f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \hat{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Zamiast pisowni ∇f często pisze sie $\operatorname{grad} f$.

Zapamiętaj: $\boxed{\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$.

Jeśli funkcja zależy tylko od jednej zmiennej kartezjańskiej, np. x, to wtedy gradient jest wyrażony przez zwykłą pochodną:

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{df}{dx}\hat{\imath}.$$

Własności gradientu.

1) Każda z pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ we wzorze na gradient mówi o tym jak szybko zmienia się funkcja f w danym kierunku, wektor $\operatorname{grad} f$ jest wypadkową tych zmian i pokazuje kierunek, w którym funkcja zmienia się najsilniej.

2) Wektor $\operatorname{grad} f$ jest prostopadły do powierzchni ekwiskalarnej.

Uzasadnić to można następująco. Rozpatrzmy powierzchnię będącą miejscem geometrycznym punktów, w których funkcja $f(x,y,z)$ ma taką samą wartość (nazwijmy tę powierzchnię powierzchnią ekwiskalarną). Równanie tej powierzchni: $f(x,y,z)$=const

Przyrost funkcji f wynosi zero jeśli będziemy się przemieszczać po tej powierzchni o $d\vec{r}$ w dowolnym kierunku. Matematycznie: weźmy różniczkę z obu stron równania: $d(f(x,y,z)) = d(\text{const})$, co daje

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Powyższe wyrażenie jest, jak widać, iloczynem skalarnym gradientu ∇f i wektora (dx, dy, dz) czyli przemieszczenia $d\vec{r}$ wektora wodzącego $\vec{r}$. Z zerowania iloczynu skalarnego wnioskujemy o prostopadłości wektorów $\operatorname{grad} f$ i $d\vec{r}$, a to z kolei implikuje prostopadłość $\operatorname{grad} f$ do powierzchni ekwiskalarnej.

Przykłady:

1) Ile wynosi $\operatorname{grad}(r)$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ jest długością promienia wodzącego? Obliczmy x-ową składową gradientu: $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$.

Pozostałe składowe będą wyglądać podobnie, czyli $\operatorname{grad}(r) = \frac{1}{r}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$.

Wykonując obliczenie w układzie sferycznym (patrz rozdz. 7, strona 3) ten wynik uzyskuje się od razu: $\operatorname{grad}(r) = \frac{d}{dr}(r)\,\hat{u}_r = 1\cdot\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

2) Obliczyć $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$.

Składowa x-owa: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\frac{x}{r^3}$.

Zatem $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x,y,z) = -\frac{1}{r^2}\hat{r}$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie taki wynik można było otrzymać prościej, obliczając gradient w układzie sferycznym: $\operatorname{grad}(\frac{1}{r}) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{u}_r = -\frac{1}{r^2}\hat{u}_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.

3) Gradient temperatury w atmosferze. Przypuśćmy, że temperatura T nad powierzchnią Ziemi zmienia się tylko w kierunku pionowym (np. maleje) $T = T(z)$. Gradient temperatury $\operatorname{grad} T(z) = (0, 0, \frac{dT}{dz})$ jest więc wektorem o kierunku pionowym (prostopadłym do powierzchni ekwiskalarnej, którą jest powierzchnia Ziemi), a jego wartość $\frac{dT}{dz}$ podaje o ile stopni zmienia się temperatura przy wzniesieniu się o jednostkową wysokość.

5 Dywergencja funkcji wektorowej

Jeśli funkcję wektorową $\vec{f}(x,y,z)$ o składowych $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ pomnożymy skalarnie przez wektor ∇ to otrzymamy w wyniku funkcję skalarną, zwaną dywergencją funkcji $\vec{f}$:

$$\nabla\cdot\vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}.$$

Przykład: Obliczyć dywergencję wektora wodzącego $\vec{r}$.
Wektor $\vec{r}$ ma składowe $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, czyli $\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

6 Rotacja funkcji wektorowej

Mnożenie wektorowe operatora nabla i funkcji wektorowej $\nabla \times \vec{f}(x, y, z)$ daje w wyniku wektor (funkcję wektorową) nazywany rotacją wektora $\vec{f}$. Zgodnie z regułami mnożenia wektorowego obliczamy ją następująco:

$$\mathrm{rot}\,\vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right).}$$

7 Gradient, dywergencja, rotacja, laplasjan w niekartezjańskich układach współrzędnych

Pomocny jest tekst: *układy_współrzędnych.pdf*.

W przypadku rozpatrywania pól cechujących się symetrią (np. sferyczną, cylindryczną) układ kartezjański nie jest wygodnym układem.

W układach współrzędnych innych niż kartezjański wzory na gradient, dywergencję, rotację i laplasjan różnią się od podanych powyżej. Wyrażają się one poprzez pochodne cząstkowe względem zmiennych właściwych dla danego układu (i przez odpowiednie wektory bazowe układu, jeśli dotyczy to gradientu i rotacji). Wzory te nie zostaną podane tutaj lecz łatwo je odszukać w podręcznikach lub internecie. Warte są jednak przytoczenia wzory dla gradientu pola skalarnego i operatora Laplace'a (laplasjanu) w układzie sferycznym. Oto one:

Układ sferyczny.

Gradient, pole skalarne $f(r, \theta, \varphi)$

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi.$$

W szczególności, gdy funkcja f zależy tylko od r:

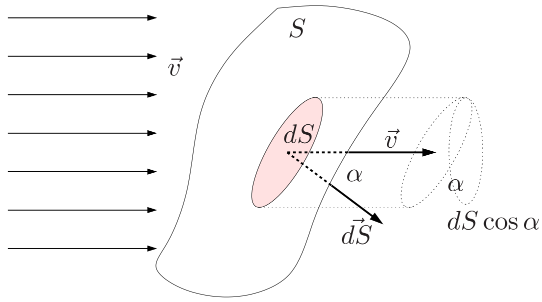
$$\mathrm{grad}\, f(r) = \frac{df}{dr}\hat{u}_r.$$

Laplasjan

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

8 Strumień wektora pola

Zaczniemy od poglądowego przykładu dla wektorowego pola prędkości $\vec{v}$ cząstek płynącej cieczy.



Rozpatrzmy strugę wody przepływającą przez pewną powierzchnię S. Ilość (objętość) wody przepływającej w 1 sekundzie przez wybrany element powierzchni dS wynosi $d\Phi = v \cdot dS$ jeśli element dS jest prostopadły do kierunku przepływu ($v \cdot 1$ s jest drogą przebytą w 1 s), a $d\Phi = v \cdot dS \cdot \cos\alpha$ jeśli powierzchnia jest nachylona pod kątem α (patrz rysunek). Wprowadzimy wektor $d\vec{S}$, który jest wektorem o długości dS i prostopadłym do powierzchni wypływu (zwrot na zewnątrz powierzchni). Wtedy elementarny strumień wypływającej przez dS wody wyrazimy w postaci iloczynu skalarnego

$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

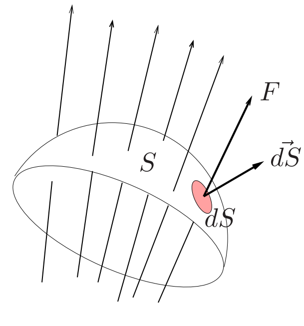
a całkowity strumień wypływający przez powierzchnię S wyrazi się poprzez całkę po całej powierzchni

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Prawa strona wyrażenia jest całką powierzchniową. Całkę powierzchniową wyraża się na ogół dwoma symbolami całkowania $\iint\limits_S$, jako że powierzchnia jest tworem dwuwymiarowym, choć często można spotkać i pojedyńczy symbol $\int\limits_S$.

Powyższa definicja strumienia dotyczy oczywiście każdego innego pola wektorowego $\vec{F}$, ogólnie:

$$\boxed{\Phi_F = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.}$$



Pole bezźródłowe.

Rozpatrzmy pole wektorowe $\vec{F}$. Jeśli weźmiemy powierzchnię S zamkniętą, a wewnątrz niej nie ma ani źródeł ani absorbentów pola (np. w wyżej omówionym przykładzie nie ma dodatkowego źródła wody w obszarze zamkniętym powierzchnią S) to tyle samo wpływa do wewnątrz powierzchni, ile z niej wypływa na zewnątrz, a więc całkowity strumień jest równy zero

$$\Phi = \oint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

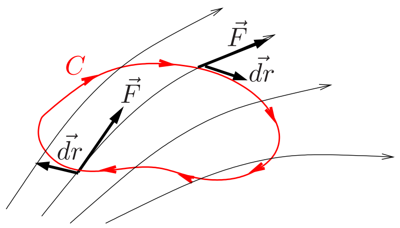
(co oznacza kółko na symbolu całki – patrz przypis [1]). Takie pole nazywamy bezźródłowym.
Zwróć uwagę, że strumień może być zarówno dodatni, jak i ujemny, w zależności od znaku iloczynu skalarnego pod całką, czyli w zależności od tego czy pole wpływa do wewnątrz powierzchni ($\Phi < 0$), czy z niej wypływa ($\Phi > 0$).

9 Krążenie wektora pola

Krążeniem pola wektorowego $\vec{F}$ po konturze zamkniętym C nazywamy całkę

$$\boxed{\text{krążenie} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.}$$

Taka całka po konturze nosi nazwę całki krzywoliniowej. Wyrażenie pod znakiem całki jest iloczynem skalarnym wektora pola $\vec{F}$ i wektora $\vec{dr}$, przedstawiającego elementarne przemieszczenie wzdłuż krzywej.



Ażeby dać fizyczny przykład – spotykaliśmy się z taką całką przy okazji obliczania pracy wykonanej na drodze C (niekoniecznie zamkniętej) przez siły pola $\vec{F}$. Przy czym, jeśli kontur C był krzywą zamkniętą, a rozpatrywane pole sił było polem zachowawczym, to wykonana praca po drodze zamkniętej wynosiła zero

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0.$$

Takie pole $\vec{F}$ którego krążenie po dowolnej krzywej zamkniętej jest równe zero nazywamy polem bezwirowym.

10 Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa

To twierdzenie pozwala zamienić całkę po dowolnej powierzchni zamkniętej S na całkę po objętości V ograniczonej tą powierzchnią:

$$\boxed{\oint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\, dV.}$$

[1]Kółko na symbolu całki oznacza, że obszar całkowania jest obszarem zamkniętym, np. w tym przypadku jest to zamknięta powierzchnia S. Podobnie jest, jeśli całkowania dokonuje sie po krzywej zamkniętej.

Lewa strona równości przedstawia całkowity strumień pola $\vec{F}$ przepływający przez S. W szczególnym przypadku, w sytuacji gdy wewnątrz dowolnie wybranej zamkniętej powierzchni nie ma źródel lub absorbentów pola to, jak już była mowa, strumienie wpływający i wypływający są równe co do wartości ale przeciwne co do znaku i w efekcie strumień wypadkowy jest równy zero. To implikuje zerowanie całki $\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\, dV$ dla każdego obszaru V, co jest możliwe wtedy i tylko wtedy gdy funkcja podcałkowa jest równa zero. Tak więc warunek

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$$

stanowi kryterium pola bezźródłowego.

11 Twierdzenie Stokes'a

Twierdzenie Stokes'a pozwala zamienić całkę po krzywej zamkniętej C na całkę po powierzchni S ograniczonej tą krzywą:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{dS}.}$$

To twierdzenie jest prawdziwe dla każdej powierzchni S, której brzegiem jest krzywa C (nie musi to być powierzchnia płaska, wyobraź sobie, że jest to błonka rozpięta na ramce, dowolnie wybrzuszona).
W szczególnym przypadku gdy pole jest zachowawcze, lewa strona (przedstawiająca pracę wektora $\vec{F}$ po krzywej zamkniętej) jest równa zero. To znów implikuje zerowanie całki $\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{dS}$ dla każdego obszaru całkowania S ograniczonego konturem C, a to jest możliwe wtedy i tylko wtedy gdy funkcja podcałkowa $\mathrm{rot}\vec{F}$ jest równa zero. Tak więc zerowanie rotacji wektora pola

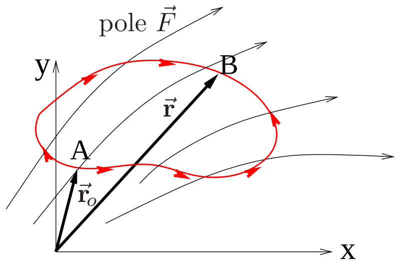
$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym zachowawczości pola $\vec{F}$.

12 Natężenie pola wektorowego i potencjał skalarny

Jeśli rozpatrujemy dowolne pole wektorowe $\vec{F}(x, y, z)$ to wektor $\vec{F}$ przypisany do punktu $(x, y, z) = \vec{r}$ nazywamy natężeniem pola w tym punkcie.

Załóżmy, że pole $\vec{F}(\vec{r})$ jest polem zachowawczym. Takie założenie jest równoważne stwierdzeniu, że "praca" wektora $\vec{F}$ przy przemieszczeniu pomiędzy dwoma punktami A i B (czyli $\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$, patrz rys.) nie zależy od tego po jakiej drodze realizowane jest to przemieszczenie.



W przypadku pola zachowawczego (i tylko wtedy) można dobrać takie pole skalarne $\varphi(\vec{r})$, którego gradient ze znakiem ujemnym jest w każdym punkcie $\vec{r}$ równy natężeniu pola $\vec{F}(\vec{r})$. Funkcję skalarną $\varphi(\vec{r})$ nazywamy potencjałem pola $\vec{F}(\vec{r})$.

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}).}$$

Uzasadnienie:
Obliczmy całkę z funkcji $\vec{F}(\vec{r})$ po dowolnej drodze pomiędzy punktami $\vec{r}_o$ i $\vec{r}$

$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \mathrm{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} (\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz).$

Wyrażenie w nawiasie pod całką jest różniczką zupełną funkcji $\varphi(\vec{r})$, mamy więc

$$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} d\varphi(\vec{r}) = -\varphi(\vec{r}) + (\varphi(\vec{r}_o).$$

Przepiszmy: $$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r}.}$$

Potencjał φ dla danego pola zachowawczego zależy tylko od punktu początkowego i końcowego. Ponieważ $\varphi(\vec{r}_o)$ jest stałą całkowania, można ją dobrać w sposób dowolny, jest to kwestia umowy w jakim punkcie $\vec{r}_o$ przyjmiemy potencjał równy zero, $\varphi(\vec{r}_o) = 0$ (często zero potencjału przyjmuje się w nieskończoności ($r_o \to \infty$)). Wtedy

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r}.$$

Przykłady.
1) Znajdź potencjał pola grawitacyjnego $\vec{F}(r) = -G\frac{mM_Z}{r^2}\hat{u}_r$ nad powierzchnią Ziemi[2]. Przyjmiemy zero potencjału w nieskończoności. Potencjał w odległości r od środka Ziemi (dla $r > R_Z$, zastanów się dlaczego(?), co trzeba by zmienić aby dostać rezultat dla $r < R_Z$?):

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} (-G\frac{mM_Z}{r^2}\hat{u}_r) \cdot d\vec{r}.$$

Po wykonaniu obliczeń (zwróć uwagę, że $\hat{u}_r \cdot d\vec{r} = dr$) otrzymujemy $\varphi(r) = -G\frac{mM_Z}{r}$. Tę wielkość nazywamy zwyczajowo energią potencjalną i oznaczamy $E_p(r)$. Fizycznie jest to praca jaką wykonamy aby równoważąc siłę grawitacji (działając siłą $-\vec{F}$) przemieścić ciało o masie m z ∞ do punktu r.

[2]ziemskie pole grawitacyjne jest przykładem pola centralnego: wektor pola $\vec{F}$ zależy tylko od odległości r od centrum pola, nie zależy od kierunku.

Znajdź samodzielnie wzór na potencjał, jeśli przyjąć zero potencjału na powierzchni Ziemi. Będzie się on różnił od otrzymanego powyżej, ale różnica potencjałów w dwóch punktach r_1 i r_2 będzie taka sama w obu przypadkach (pokaż!).

2) Znaleźć pole sił, któremu odpowiada potencjał $\varphi(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (k jest stałą).
Mamy do czynienia z symetrią sferyczną, wygodnie jest liczyć w układzie sferycznym. $\vec{F} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{2}kr^2\hat{u}_r) = -kr\hat{u}_r = -k\vec{r}.$

3) Uzasadnij, że dla pola sił tarcia nie istnieje potencjał.