



**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

---

## **Praca inżynierska**

**Elżbieta Wach**

kierunek studiów: **informatyka stosowana**

kierunek dyplomowania: **metody numeryczne**

# **Analiza przestrzenna niestabilności schematów różnicowych dedykowanych równaniu adwekcji**

Opiekun: **dr hab. inż. Bartłomiej Szafran, prof. AGH**

**Kraków, styczeń 2011**

Oświadczam, świadoma odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałam osobiście i samodzielnie i nie korzystałam ze źródeł innych, niż wymienione w pracy.

.....  
(czytelny podpis)

Merytoryczna ocena pracy przez opiekuna:

Merytoryczna ocena pracy przez recenzenta:

# Spis treści

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Cele pracy</b>                                    | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Wstęp teoretyczny</b>                             | <b>6</b>  |
| 2.1      | Wprowadzenie do mechaniki płynów . . . . .           | 6         |
| 2.2      | Przepływ stacjonarny . . . . .                       | 7         |
| 2.2.1    | Definicja . . . . .                                  | 7         |
| 2.2.2    | Linie i funkcja strumienia, wirowość . . . . .       | 8         |
| 2.2.3    | Równania Naviera-Stokesa . . . . .                   | 9         |
| 2.2.4    | Przepływ Poiseuille . . . . .                        | 10        |
| 2.2.5    | Przepływ z zastawką - warunki na ściankach . . . . . | 11        |
| 2.2.6    | Dyskretyzacja równań . . . . .                       | 12        |
| 2.3      | Adwekcja . . . . .                                   | 13        |
| 2.3.1    | Definicja, równanie adwekcji . . . . .               | 13        |
| 2.3.2    | Dyskretyzacja . . . . .                              | 14        |
| 2.4      | Stabilność . . . . .                                 | 15        |
| 2.4.1    | Twierdzenia . . . . .                                | 15        |
| 2.4.2    | Schemat <i>leapfrog</i> . . . . .                    | 16        |
| 2.4.3    | Schemat Cranka - Nicolsona . . . . .                 | 17        |
| <b>3</b> | <b>Implementacja</b>                                 | <b>18</b> |
| <b>4</b> | <b>Wyniki</b>  | <b>19</b> |
| 4.1      | Strumień, wirowość, prędkość . . . . .               | 19        |
| 4.1.1    | Przepływ Poiseuille . . . . .                        | 19        |
| 4.1.2    | Przepływ z zastawką . . . . .                        | 20        |
| 4.2      | Adwekcja . . . . .                                   | 22        |
| 4.2.1    | Przepływ Poiseuille . . . . .                        | 23        |
| 4.2.2    | Przepływ z zastawką . . . . .                        | 24        |
| 4.3      | Analiza niestabilności schematów . . . . .           | 26        |
| 4.3.1    | Przypadek I: $j_k = -20$ . . . . .                   | 26        |
| 4.3.2    | Przypadek II: $j_k = 0$ . . . . .                    | 30        |
| <b>5</b> | <b>Podsumowanie</b>                                  | <b>33</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                    | <b>35</b> |

# 1 Cele pracy

Praca będzie dotyczyła numerycznego rozwiązania cząstkowego równania różniczkowego, opisującego zjawisko adwekcji. Pod mianem adwekcji rozumie się unoszenie zachowanej wielkości skalarnej przez pole wektorowe (np. unoszenie zanieczyszczeń przez strumień cieczy). Celem pracy jest wprowadzenie hybrydowego schematu różnicowego do rozwiązania równania adwekcji przy polu prędkości, cechującym się dużą zmiennością przestrzenną.

W rozwiązywaniu równań cząstkowych wygodne jest używanie schematów jawnych, które działają jak podstawienia. Schematy te charakteryzuje jednak ograniczenie na maksymalny krok czasowy, gwarantujący stabilność rachunku. Metody niejawne pozwalają rozwiązywać schematy z dowolnie dużym krokiem czasowym, ale wykonanie pojedynczego kroku czasowego może być czasochłonne, jako że zachodzi przez rozwiązanie układu równań (w naszym przypadku - liniowych).

W pracy rozważany jest praktycznie ważny problem - pola prędkości, danego przez rozwiązanie równań Naviera-Stokesa dla lepkiej i nieściśliwej cieczy, która przepływa przez zwężenie kanału. W zwężeniu prędkość jest bardzo duża. W pracy zbadamy, jak w okolicach przewężenia w schemacie jawnym pojawia się niestabilność i jak propaguje się ona na całe pudło obliczeniowe. Poprawny, numeryczny opis adwekcji dla przewężenia wymaga zastosowania schematu niejawnego lub schematu jawnego z bardzo drobnym krokiem czasowym. W pracy wykonana zostanie próba wprowadzenia metody, w której zastosowany będzie schemat niejawny w przewężeniu, a jawny wszędzie poza nim. Przedyskutujemy efektywność tej metody.

Uzyskany schemat - jeśli uda się go tak zaprogramować, aby w miarę optymalnie wybierał obszary, gdzie ma zastosować przepis jawny, a gdzie niejawny - powinien być stabilny, dawać dobre wyniki dla większych kroków czasowych, niż schemat *leapfrog*, oraz wymagać mniejszej ilości obliczeń. Schematem jawnym, używanym w pracy, będzie schemat *leapfrog*, natomiast niejawnym - klasyczny schemat Cranka-Nicolsona.

## 2 Wstęp teoretyczny

### 2.1 Wprowadzenie do mechaniki płynów

Mechanika płynów zajmuje się kinematyką i dynamiką płynów, tj. cieczy i gazów. Posiadają one kilka właściwości fizycznych, istotnych dla poniższej pracy, dlatego zostaną one w tej sekcji krótko omówione<sup>1</sup>.

**Gęstość** płynu  $\rho$  dla chwili  $t$  punkcie  $(x, y, z)$  to granica:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Podstawowe pojęcia i wzory mechaniki płynów na podstawie: [2, str. 16 - 19]

**Ścisłością** nazywamy skłonność płynu do deformacji objętościowej pod wpływem zmiany ciśnienia  $dp$ . Wymusza ono na objętości  $V$  zmianę o  $dV$ . Ścisłość charakteryzuje *współczynnik ścisłości*, definiowany jako

$$k_s = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \left[ \frac{1}{Pa} \right]. \quad (2)$$

Gazy charakteryzują się dużą ścisłością, natomiast dla cieczy powyższy wzór daje tak małe wartości, że zazwyczaj są pomijane. Tak będzie i w tejże pracy.

**Lepkość** oznacza właściwość, która charakteryzuje wewnętrzny opór przeciwko ruchowi płynu, pochodzący od jego przemieszczających się warstw. W uproszczeniu można przyjąć, że pomiędzy sąsiadującymi ze sobą, poruszającymi się z różną prędkością, warstwami powstaje tarcie, spowodowane przesuwaniem się ich po sobie nawzajem.

Prędkość warstwy płynu, znajdującej się bezpośrednio na płaskiej ściance, pozostaje w bezruchu (tzw. warunek brzegowy bez poślizgu). Im bardziej będziemy w tych rozważaniach oddalać się od ścianki, tym prędkość płynu będzie większa - tzn., że każda warstwa będzie miała inną jej wartość. Zjawisko to jest spowodowane omawianą lepkością.

W używanych dalej wzorach często będziemy spotykać oznaczenie  $\mu$  [ $\frac{kg}{m \cdot s} = Pa \cdot s$ ] - jest to *dynamiczny współczynnik lepkości*, będący miarą lepkości płynu. Jest on szczególnie istotny w cieczech, natomiast w gazach często pomijany.

Gęstość i ścisłość płynu są zależne od **ciśnienia**  $p$  [ $Pa$ ]. Jego wpływ będziemy zaznaczać przez *gradient ciśnienia*  $Q$ .

Podsumowując - "Mechanika płynu doskonałego wykorzystuje model płynu nielepkiego i nieściśliwego, a mechanika płynu rzeczywistego - model płynu lepkiego i ściśliwego. **Model płynu lepkiego i nieściśliwego jest zbliżony do własności cieczy**, model płynu nielepkiego i ściśliwego odpowiada natomiast warunkom przepływu gazu z dużymi prędkościami"<sup>2</sup>. Zgodnie z tym, skoro będziemy badać własności cieczy, przyjmijmy dobrze ją przybliżający model płynu lepkiego i nieściśliwego.

## 2.2 Przepływ stacjonarny

### 2.2.1 Definicja

Rozróżniamy przepływ ustalony i nieustalony. Jeżeli parametry ruchu (takie, jak prędkość, gęstość, ciśnienie) zmieniają się wraz z czasem, to przepływ nazywamy nieustalonym (niestacjonarnym). W innym wypadku - stałe parametry (np. prędkość płynu w danym punkcie jest stała) - mamy do czynienia z przepływem ustalonym (stacjonarnym)<sup>3</sup>.

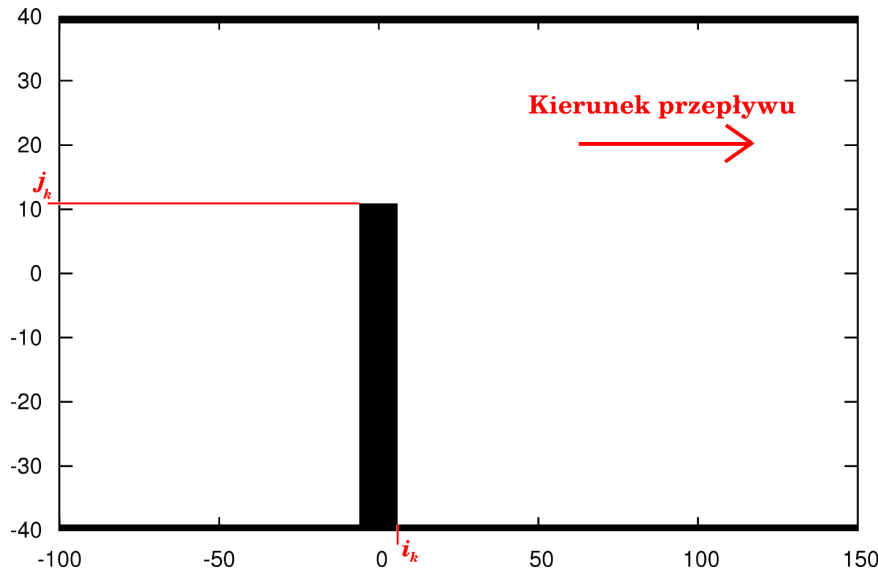
Ponadto, dla uproszczenia przyjmijmy, że przepływ jest niezmienny przy przesunięciu wzdłuż jednej z osi, będących prostopadłymi do kierunku przepływu. Dlatego wystarczy przebadać model dwuwymiarowy  $(x, y)$ , pomijając kierunek tej osi - tak, jak na rysunku [1]. Jak widać,

---

<sup>2</sup>Źródło cytatu: [2, str. 35]

<sup>3</sup>[2, str. 33]

wierzchołki wstawionej zastawki znajdują się w punktach siatki:  $(-i_k, -40)$ ,  $(i_k, -40)$ ,  $(-i_k, j_k)$  oraz  $(i_k, j_k)$ , natomiast całość siatki zawiera się w prostokącie:  $[-100, 150] \times [-40, 40]$ . Każdy punkt  $(i, j)$  siatki odpowiada w rzeczywistości punktowi o współrzędnych  $(x, y) = (idx, jdy)$ . Przyjmiemy, że  $dz = dx = dy = 0.01$ , dlatego:  $(x, y) = (idz, jdz) = (0.01i, 0.01j)$ . Oznacza to, że pudło obliczeniowe we współrzędnych  $(x, y)$  to prostokąt  $[-1, 1.5] \times [-0.4, 0.4]$ .



Rysunek 1: Obraz przedstawia przekrój rury z zastawką, na której będziemy pracować. Jak nietrudno zauważyć, gdy przez rurę popłynie ciecz, prędkość punktowo będzie stała. Dlatego w niniejszej pracy wykorzystamy model przepływu stacjonarnego.

### 2.2.2 Linie i funkcja strumienia, wirowość

**Liniami strumienia** nazywamy krzywe, będące w każdym punkcie równoległe do kierunku przepływu, czyli do wektora prędkości w tym punkcie. W przypadku dwuwymiarowego wektora  $\vec{V} = [u, v]$ , równoległość elementów  $dx$  i  $dy$  takiej krzywej opisujemy równaniem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}. \quad (3)$$

Co istotne, granice pozostających w bezruchu, płaskich, szczelnych ścianek (np. rury lub przegrody) są zawsze jednymi z linii strumienia, ponieważ płyn nie może przekroczyć tych stałych powierzchni, ograniczających go<sup>4</sup>.

W przypadku dwóch wymiarów, koncepcję linii strumienia możemy powiązać z równaniem ciągłości w poniższy sposób.

*Równanie ciągłości:*

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \rho_p \vec{V} = 0. \quad (4)$$

<sup>4</sup>[4, str. 23]



Jak ustalono wcześniej, przepływ w naszym doświadczeniu jest stacjonarny, stąd gęstość jest niezależna od czasu:  $\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$ . Założyliśmy też, że płyn jest nieściśliwy - stała gęstość (przyjmujemy  $\rho_p = 1$ ). Ostatecznie z równania ciągłości otrzymujemy:

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Teraz już można wprowadzić pojęcie **funkcji strumienia**  $\psi$ , zależnej od  $x, y$  (w odpowiednim przypadku, może zależeć również od czasu):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Prostą zależność funkcji strumienia od prędkości możemy uzyskać, zapisując równanie:  $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy$ , i wstawiając do niego wzory (7)<sup>5</sup>:

$$d\psi = udy - vdx. \quad (8)$$

**Wirowością**  $\zeta$  nazywamy rotację wektora prędkości  $\vec{V}$ , stąd:

$$\zeta = \text{rot} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

Łącząc równania (7) i (9):

$$\zeta = \frac{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (10)$$

W ten sposób dostajemy pierwsze z równań<sup>6</sup>, które będziemy rozwiązywać numerycznie:

$$\nabla^2 \psi = \zeta. \quad (11)$$

Jest to równanie Poissona z wirowością w roli niejednorodności.

### 2.2.3 Równania Naviera-Stokesa

Kolejnymi, podstawowymi równaniami hydrodynamiki są *równania Naviera-Stokesa*. Dotyczą zasad zachowania pędu i masy dla przepływu płynu:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - \left( \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{V} - \frac{1}{\rho_p} \cdot Q + \frac{\mu}{\rho_p} \cdot \nabla^2 \vec{V}, \quad (12)$$

gdzie  $\mu$  to dynamiczny współczynnik lepkości,  $Q$  - gradient ciśnienia<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>[4, str. 24]

<sup>6</sup>Wyprowadzenie równania na podstawie: [5, str. 150 - 152]

<sup>7</sup>Za: [5, str. 150]

W ogólnym przypadku, ciśnienie jest zależne od temperatury i gęstości, ale zakładamy, że temperatura jest stała. Podobnie gęstość  $\rho_p = const$ , skoro przyjmujemy, że nasz płyn (konkretniej - ciecz) jest nieściśliwy. Prędkość w danym punkcie nie zmienia się w czasie (przepływ ustalony), stąd tak, jak w poprzedniej sekcji, pozbywamy się pochodnej:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{Q}{\rho_p} + \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \vec{V}, \quad (13)$$

co w dwóch wymiarach daje:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Q}{\rho_p} + \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 u \quad (14)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{Q}{\rho_p} + \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 v. \quad (15)$$

(14) różniczkujemy po  $y$ , (15) po  $x$ :

$$u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

$$u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (17)$$

...odejmujemy stronami:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Z definicji wirowości (9):

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \zeta. \quad (19)$$

Po wstawieniu wzorów (7) otrzymujemy drugie z równań, które będziemy rozwiązywać<sup>8</sup>:

$$\frac{\mu}{\rho_p} \nabla^2 \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (20)$$

## 2.2.4 Przepływ Poiseuille

Jeden z najprostszych przypadków, które opisują równania Naviera-Stokesa, to tzw. przepływ Poiseuille, tj. przepływ w rurze bez żadnej przeszkody. Wówczas ruch płynu jest symetryczny, więc prędkość  $\vec{V}$  ma tylko jedną składową:  $\vec{V} = [u, v] = [u(y), 0]$ <sup>9</sup>. W takim przypadku potrafimy  $u(y)$  policzyć analitycznie, a co za tym idzie -  $\psi$  i  $\zeta$  również.

Zaczynamy od przekształcenia równania (14). Bierzymy pod uwagę, że  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  i  $v = 0$ :

$$0 = -\frac{Q}{\rho_p} + \frac{\mu}{\rho_p} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (21)$$

<sup>8</sup>Wyprowadzenie na podstawie: [5, str. 151 - 152]

<sup>9</sup>[4, str. 62]

Przekształcamy równanie tak, aby wyliczyć składową prędkości<sup>10</sup>:  $u$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{Q}{\mu} \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Q}{\mu} y + A, \quad A \in \mathbb{R} \quad (23)$$

$$u = \frac{Q}{\mu} \cdot \frac{1}{2} y^2 + Ay + B, \quad B \in \mathbb{R} \quad (24)$$

$$u = \frac{Q}{2\mu} \left( y^2 + \frac{2\mu}{Q} Ay + \frac{2\mu}{Q} B \right) \quad (25)$$

Dla ułatwienia zapisu:  $C = \frac{2\mu}{Q}A$ ,  $D = \frac{2\mu}{Q}B$ . Miejsca zerowe:  $y_1 = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4D}}{2}$ ,  $y_2 = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4D}}{2}$ .

$$u = \frac{Q}{2\mu} (y - y_1)(y - y_2) = \frac{Q}{2\mu} (y^2 - y(y_1 + y_2) + y_1 y_2) \quad (26)$$

W naszym przypadku przepływ wyklucza poślizg na ściankach - stąd  $u(y = -0.4)$ ,  $u(y = 0.4) = 0$ . Wobec tego chcemy, żeby dla  $y \in \{-0.4, 0.4\}$  wzór się zerował - dlatego przyjmujemy, że wartości te są miejscami zerowymi<sup>11</sup> równania (26):  $y_1 = -0.4$ ,  $y_2 = 0.4$ .

Teraz znalezienie funkcji strumienia i wirowości jest już proste (za równaniami (7), (9)):

$$\psi_a(x, y) = \int u dy = \frac{Q}{2\mu} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_1 + y_2) + y y_1 y_2 \right) \quad (27)$$

$$\zeta_a(x, y) = \frac{du}{dy} = \frac{Q}{2\mu} (2y - y_1 - y_2). \quad (28)$$

Są to rozwiązania dokładne - analityczne. W programie skorzystamy z nich, wstawiając je jako warunki brzegowe dla przepływu Poiseuille na bokach prostokąta siatki obliczeniowej.

### 2.2.5 Przepływ z zastawką - warunki na ściankach

Do rury wstawiamy przeszkodę (sytuacja z rysunku (1)). Wszystkie brzegi są jednocześnie liniami strumienia i tak, jak w przepływie Poiseuille, ustalamy tam wartości analityczne  $\psi(x, y)$  (wzór (27)). Tym razem nie można takiego zabiegu wykonać z wirowością, ponieważ teraz jest ona zmienna dla różnych iteracji, zależna od  $\psi$ <sup>12</sup>.

Z rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\psi(i, j + 1) = \psi(i, j) + dz \frac{\partial \psi}{\partial y}(i, j) + \frac{dz^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(i, j) + \dots \quad (29)$$

Na górnym brzegu zastawki  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  oraz  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$ . Stąd:

$$\psi(i, j + 1) = \psi(i, j) + \frac{dz^2}{2} \cdot \zeta(i, j) \quad (30)$$

<sup>10</sup>Rozwiązanie analityczne równania za: [4, str. 63]

<sup>11</sup>[1, wykład 10, str. 37]

<sup>12</sup>Wyprowadzenie warunków brzegowych na podstawie: [5, str. 154 - 157]

$$\zeta(i, j_k) = 2 \frac{\psi(i, j_k + 1) - \psi(i, j_k)}{dz^2}. \quad (31)$$

Taką samą sytuację mamy na ściankach rury (ponieważ również są ustawione horyzontalnie):

$$\zeta(i, 40) = 2 \frac{\psi(i, 39) - \psi(i, 40)}{dz^2} \quad (32)$$

$$\zeta(i, -40) = 2 \frac{\psi(i, -39) - \psi(i, -40)}{dz^2}. \quad (33)$$

Analogicznie możemy przeprowadzić rozważania dla lewej i prawej krawędzi zastawki:

$$\psi(i + 1, j) = \psi(i, j) + dz \frac{\partial \psi}{\partial x}(i, j) + \frac{dz^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(i, j) + \dots \quad (34)$$

Tutaj:  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  oraz  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \zeta$ .

$$\psi(i + 1, j) = \psi(i, j) + \frac{dz^2}{2} \cdot \zeta(i, j) \quad (35)$$

Dlatego na omawianych brzegach:

$$\zeta(i_k, j) = 2 \frac{\psi(i_k + 1, j) - \psi(i_k, j)}{dz^2} \quad (36)$$

$$\zeta(-i_k, j) = 2 \frac{\psi(-i_k - 1, j) - \psi(-i_k, j)}{dz^2}. \quad (37)$$

Wartości na rogach przeszkody ustalimy, obliczając średnią arytmetyczną z przyjętych (na przecinających się w tym punkcie odcinkach) warunków brzegowych.

## 2.2.6 Dyskretyzacja równań

Oba równania, definiujące zależność między strumieniem a wirowością, rozwiążemy metodą relaksacji<sup>13</sup>. Jest to metoda iteracyjna, dlatego w każdej iteracji wzory poprawiają ostatnie z wyników  $\psi$  i  $\zeta$ .

Równanie (11) jest bardzo proste w dyskretyzacji - jak zwykle równanie Poissona:

$$\psi(i, j) := \frac{\psi(i + 1, j) + \psi(i - 1, j) + \psi(i, j + 1) + \psi(i, j - 1) - \zeta(i, j)dz^2}{4}. \quad (38)$$

Bardziej skomplikowana dyskretyzacja czeka nas przy równaniu (20) - jest to wciąż równanie eliptyczne, jednak już nie Poissona:

$$\begin{aligned} \zeta(i, j) := & \frac{\zeta(i + 1, j) + \zeta(i - 1, j) + \zeta(i, j + 1) + \zeta(i, j - 1)}{4} - \\ & - \frac{[\psi(i, j + 1) - \psi(i, j - 1)][\zeta(i + 1, j) - \zeta(i - 1, j)]}{16} + \\ & + \frac{[\psi(i + 1, j) - \psi(i - 1, j)][\zeta(i, j + 1) - \zeta(i, j - 1)]}{16} \end{aligned} \quad (39)$$

By móc osiągnąć nasz cel - rozwiązanie równania adwekcji - z tych dwóch wyników będziemy musieli znaleźć pole prędkości. Ze wzorów (7) i definicji pochodnej cząstkowej wynika, że:

$$u(i, j) = \frac{\psi(i, j + 1) - \psi(i, j)}{dz}, \quad v(i, j) = -\frac{\psi(i + 1, j) - \psi(i, j)}{dz}. \quad (40)$$

<sup>13</sup>Źródło dyskretyzacji strumienia i wirowości: [1, wykład 10, str. 47]

## 2.3 Adwekcja

### 2.3.1 Definicja, równanie adwekcji

Adwekcja jest to zjawisko fizyczne, polegające na unoszeniu wielkości skalarnej (np. gęstości plamy oleju, rozlanej na cieczy) przy pomocy wielkości wektorowej (np. pola prędkości wspomnianej cieczy)<sup>14</sup>. Sama adwekcja jest efektem tylko i wyłącznie kinetycznym (taki przypadek rozpatrujemy, chociaż w rzeczywistości rzadko spotyka się ją samą - częściej wraz z np. dyfuzją). Opisuje ją równanie hiperboliczne pierwszego rzędu, tzw. równanie adwekcji. Chcemy w każdym punkcie obliczyć gęstość  $\rho(x, y)$  rozlanej plamy oleju w zależności od (wyliczonego z równań (11), (20), i (7)) pola prędkości  $\vec{V}$  cieczy.

Zakładamy, że interesuje nas obszar  $\Omega$  o brzegu  $\Gamma$ , w którym występuje  $\vec{V}$ , będące niezależne od czasu (przyjęliśmy model przepływu stacjonarnego). Zasada zachowania masy<sup>15</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho(r, t) d^3r = - \iint_{\Gamma} \rho(r, t) \vec{V}(r) d^2r. \quad (41)$$

Do uproszczenia przydatny jest **wzór Gaussa - Ostrogradskiego**:

#### Twierdzenie 1 (Gaussa - Ostrogradskiego)

“Niech w obszarze przestrzennym  $V$  ograniczonym powierzchnią zamkniętą  $S$  dane będzie pole wektorowe  $\mathbf{W}(P, Q, R)$  klasy  $C^1$ . Zachodzi wzór

$$\iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dv = \iint_{S+} P dydz + Q dzdx + R dx dy, \quad (42)$$

gdzie  $S+$  oznacza zewnętrzną stronę powierzchni  $S$ <sup>16</sup>.

W rozpatrywanym przypadku wzór ten przyjmuje formę:

$$\iiint_{\Omega} \nabla [\rho(r, t) \vec{V}(r)] d^3r = \iint_{\Gamma} \rho(r, t) \vec{V}(r) d^2r. \quad (43)$$

Po wstawieniu do wzoru (41) otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho(r, t) d^3r = - \iiint_{\Omega} \nabla [\rho(r, t) \vec{V}(r)] d^3r \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = -\nabla [\rho(r, t) \vec{V}(r)]. \quad (45)$$

Powyższe równanie to poszukiwane równanie adwekcji. Będziemy je rozwiązywać w dwóch wymiarach:

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = -\nabla [\rho(x, y, t) \cdot \vec{V}(x, y)]. \quad (46)$$

<sup>14</sup>Definicja za: [1, wykład 13, str. 4]

<sup>15</sup>Wyprowadzenie równania adwekcji na podstawie: [1, wykład 13, str. 4]

<sup>16</sup>Źródło twierdzenia: [6, str. 156]

Co prawda operator  $\nabla$  znajduje się przed ilorazem  $[\rho(x, y, t) \cdot \vec{V}(x, y)]$ , gdzie  $\vec{V}(x, y)$  jest zmienne w przestrzeni, jednak równanie opisuje przypadek ogólny. My wybraliśmy ciecz nieściśliwą, a dla takiego płynu dywergencja  $\nabla \vec{V} = 0$ , więc możemy pominąć tę część pochodnej iloczynu, w której liczylibyśmy pochodną cząstkową  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$  lub  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$ .<sup>17</sup>

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = -u(x, y) \cdot \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial x} - v(x, y) \cdot \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial y} \quad (47)$$

Równanie adwekcji to jedno z prostszych równań cząstkowych. W jednym wymiarze bez problemu da się analitycznie wyliczyć rozwiązanie. Problem pojawia się przy większych wymiarach. W niektórych przypadkach jest ono prawie niemożliwe do rozwiązania matematycznego, dlatego często jest rozwiązywane numerycznie.

### 2.3.2 Dyskretyzacja

Równanie (47) będziemy rozwiązywać dwoma schematami różnicowymi (oraz trzecim, będącym połączeniem wcześniejszych). Pierwszy z nich to *leapfrog*, który konstruujemy przy użyciu centralnych schematów różnicowych<sup>18</sup>:

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n-1}}{2dt} = -u_{i,j} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2dx} - v_{i,j} \frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n}{2dy} \quad (48)$$

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{n-1} - dt \left( u_{i,j} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{dz} + v_{i,j} \frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n}{dz} \right). \quad (49)$$

Jest to schemat dwupoziomowy, dlatego musi wystartować od gęstości plamy w dwóch chwilach:  $t = 0$  i  $t = dt$ , czyli  $n = 1$  i  $n = 2$ . W obliczeniach przyjmiemy, że w chwili początkowej plamę rozlano w sposób:

$$\rho_{i,j}^1 = \rho(x, y, t = 0) = e^{-25((x+0.6)^2 + y^2)}, \quad (50)$$

...a po upływie czasu  $dt$  pozwolimy jej przenieść się wraz z lokalną prędkością:

$$\rho_{i,j}^2 = \rho(x_i - u_{i,j}dt, y_j - v_{i,j}dt, t = 0). \quad (51)$$

Użyjemy również schematu **Cranka - Nicolsona**. Aby zdyskretyzować równanie (47) tą metodą, należy najpierw rozpatrzyć schematy: przedni Eulera i wsteczny Eulera (tworzone przy pomocy prawostronnego ilorazu różnicowego dla pochodnej czasowej, a także centralnego ilorazu dla pochodnej przestrzennej w odpowiedniej chwili czasowej), a następnie uśrednić je stronami<sup>19</sup>:

- **Przedni schemat Eulera**

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{dt} = -u_{i,j} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2dx} - v_{i,j} \frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n}{2dy} \quad (52)$$

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \frac{dt}{2dz} [u_{i,j} (\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n) + v_{i,j} (\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n)] \quad (53)$$

<sup>17</sup>[1, wykład 14, str. 36]

<sup>18</sup>Dyskretyzacja schematu *leapfrog* na podstawie: [1, wykład 14, str. 36]

<sup>19</sup>Dyskretyzacja schematu CN na podstawie: [1, wykład 14, str. 47]

- Wsteczny schemat Eulera

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{dt} = -u_{i,j} \frac{\rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2dx} - v_{i,j} \frac{\rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2dy} \quad (54)$$

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \frac{dt}{2dz} [u_{i,j} (\rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}) + v_{i,j} (\rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^{n+1})] \quad (55)$$

- Schemat Cranka - Nicolsona - z równań (53), (55)

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \frac{dt}{4dz} [ & u_{i,j} (\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^n - \rho_{i-1,j}^{n+1}) + \\ & + v_{i,j} (\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^n - \rho_{i,j-1}^{n+1}) ] \end{aligned} \quad (56)$$

## 2.4 Stabilność

### 2.4.1 Twierdzenia

**Stabilność** schematu różnicowego to własność, która określa, że jeśli warunek początkowy zostanie zaburzony o skończone wartości, to różnica między rozwiązaniami (przed i po zaburzeniu) także będzie skończona<sup>20</sup>.

Kolejnym pojęciem, potrzebnym w dalszych rozważaniach, jest **zbieżność** - oznacza, że przy bardzo małym kroku czasowym ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), błąd globalny  $e$  dąży do 0 w chwili  $T$ <sup>21</sup>:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, n\Delta t = T} |e_n| = 0. \quad (57)$$

Silniejszym kryterium, niż zdefiniowana wcześniej stabilność, jest **stabilność bezwzględna**. Określamy ją dla danego schematu wraz z równaniem, które ma rozwiązywać. Schemat różnicowy dla określonego, stałego kroku  $\Delta t$  jest bezwzględnie stabilny, gdy jego wyniki pozostają skończone [1, wykład 13, str. 45].

### Twierdzenie 2 (Kryterium CFL: Couranta - Friedrichsa - Lewy'ego)

*"Warunkiem koniecznym zbieżności schematu różnicowego (dla dowolnego warunku początkowego) jest, aby jego numeryczna domena zależności zawierała w sobie (fizyczną) domenę zależności równania różniczkowego."*<sup>22</sup>

Powyższe twierdzenie rozumiemy w następujący sposób: rozwiązanie numeryczne nie może wyprzedzić faktycznego zjawiska - np. dla równania fali, krok czasowy  $\Delta t$  nie może być większy, niż czas, który w rzeczywistości zajmuje fali przebycie danej odległości  $\Delta x$  (wielkość oczka siatki):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_{max}}. \quad (58)$$

W zapisie przyjęto, że

$$\alpha = \frac{V\Delta t}{\Delta x} \quad (59)$$

to liczba Couranta<sup>23</sup>.

<sup>20</sup>Definicja stabilności na podstawie: [1, wykład 13, str. 39]

<sup>21</sup>Definicja zbieżności za: [1, wykład 13, str. 33]

<sup>22</sup>Źródło twierdzenia: [1, wykład 13, str. 29]

<sup>23</sup>[1, wykład 13, str. 15]

### Twierdzenie 3 (Zasada Maksimum)

Schemat postaci

$$U_n^{n+1} = \sum_{|s| \leq S} c_s U_{j+s}^n \quad (60)$$

jest **bezwzględnie stabilny**, gdy każdy współczynnik  $c_s$  jest dodatni, a ich suma jest równa 1.<sup>24</sup>

Stabilność użytych w pracy schematów - **leapfrog** i **Cranka - Nicolsona** - przebadamy przy pomocy **analizy von Neumanna** w najbliższych dwóch podrozdziałach. Dla ułatwienia zrobimy to w jednym wymiarze (w interesujących nas dwóch wymiarach zależności końcowe są analogiczne). Na potrzeby analizy będziemy więc dyskretyzować równanie (47) w formie:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -V(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}. \quad (61)$$

#### 2.4.2 Schemat *leapfrog*

Dyskretyzacja równania (61), przeprowadzona podobnie, jak wcześniej w dwóch wymiarach:

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^{n-1} - \alpha(\rho_{n+1}^n - \rho_{j-1}^n). \quad (62)$$

Analizę von Neumanna<sup>25</sup> zaczynamy od transformaty Fouriera:

$$\rho_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 e^{ijk\Delta x}, \quad (63)$$

...którą stosujemy do (62):

$$A_k^{n+1} = -\alpha A_k^n (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) + A_k^{n-1}. \quad (64)$$

EkspONENTĘ zamieniamy z wzoru Eulera ( $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ ):

$$\begin{aligned} A_k^{n+1} &= -\alpha A_k^n (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(-k\Delta x) - i \sin(-k\Delta x)) + A_k^{n-1} = \\ &= -\alpha A_k^n (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x)) + A_k^{n-1} = \\ &= -2i\alpha A_k^n \sin(k\Delta x) + A_k^{n-1}. \end{aligned} \quad (65)$$

Aby znaleźć wzmocnienie, musimy skorzystać z zależności:

$$A_k^1 = M_k^1 A_k^0 \implies A_k^{n+1} = M_k^{n+1} A_k^0. \quad (66)$$

$$M_k^{n+1} A_k^0 = -2i\alpha M_k^n A_k^0 \sin(k\Delta x) + M_k^{n-1} A_k^0 \quad (67)$$

$$M_k^2 = -2i\alpha M_k \sin(k\Delta x) + 1 \quad (68)$$

<sup>24</sup>Zasada Maksimum za: [1, wykład 13, str. 45]

<sup>25</sup>Analiza von Neumanna schematu *leapfrog* na podstawie: [1, wykład 14, str. 33 - 34]



Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$M_k^2 + 2i\alpha M_k \sin(k\Delta x) - 1 = 0 \quad (69)$$

$$M_{k1,2} = -i\alpha \sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)} \quad (70)$$

Za kryterium CFL (tw. 2),  $\alpha \leq 1$ . Wobec tego, wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne, a całość pierwiastka - rzeczywista. Dzięki temu wiemy, jak policzyć moduł:

$$|M_{k1,2}| = \sqrt{\alpha^2 \sin^2(k\Delta x) + 1 - \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)} = \sqrt{1} = 1. \quad (71)$$

Chcielibyśmy spełnić warunek  $|M_k| \leq 1$ . Jak widać, udało się, ponieważ  $M_k$  niezależnie od  $\alpha$  jest równe 1. Należy jednak pamiętać, że w trakcie analizy założyliśmy, że

$$\alpha \leq 1. \quad (72)$$

Jest to warunek stabilności schematu *leapfrog*.

### 2.4.3 Schemat Cranka - Nicolsona

Dyskretyzacja dla (61):

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\alpha}{4}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) - \frac{\alpha}{4}(\rho_{j+1}^{n+1} - \rho_{j-1}^{n+1}). \quad (73)$$

Korzystając z transformaty (63)<sup>26</sup>:

$$\begin{aligned} A_k^{n+1} &= A_k^n - \frac{\alpha}{4} A_k^{n+1} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) - \frac{\alpha}{4} A_k^n (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = \\ &= A_k^n - \frac{\alpha}{4} A_k^{n+1} (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(-k\Delta x) - i \sin(-k\Delta x)) - \\ &\quad - \frac{\alpha}{4} A_k^n (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(-k\Delta x) - i \sin(-k\Delta x)) = \\ &= A_k^n - \frac{\alpha}{4} A_k^{n+1} (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x)) - \\ &\quad - \frac{\alpha}{4} A_k^n (\cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x) - \cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x)) = \\ &= A_k^n - i \frac{\alpha}{2} A_k^{n+1} \sin(k\Delta x) - i \frac{\alpha}{2} A_k^n \sin(k\Delta x). \end{aligned} \quad (74)$$

Podstawiamy wzór (66) i dokonujemy dalszych przekształceń, mających na celu sprawdzenie, dla jakich warunków schemat jest stabilny, tzn.  $|M_k| \leq 1$ :

$$M_k^{n+1} A_k^0 = M_k^n A_k^0 - i \frac{\alpha}{2} M_k^{n+1} A_k^0 \sin(k\Delta x) - i \frac{\alpha}{2} M_k^n A_k^0 \sin(k\Delta x) \quad (75)$$

$$M_k = 1 - i \frac{\alpha}{2} M_k \sin(k\Delta x) - i \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x) \quad (76)$$

$$M_k = \frac{1 - i \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x)}{1 + i \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x)} \quad (77)$$

$$|M_k| = \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin^2(k\Delta x)}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin^2(k\Delta x)}} = 1 \quad (78)$$

<sup>26</sup>Analiza von Neumanna schematu Cranka - Nicolsona na podstawie: [1, wykład 14, str. 48]

Obliczony współczynnik wzmocnienia, niezależnie od wartości  $\alpha$ , zawsze spełnia warunek  $|M_k| \leq 1$ . Wniosek: schemat Cranka - Nicolsona jest stabilny dla każdego kroku czasowego  $\Delta t$ , co jest jego ogromną zaletą.

### 3 Implementacja

Program napisano przy pomocy języka C++. Jest podzielony na 3 zasadnicze części, znajdujące się w osobnych plikach:

- `przeplyw.cpp` - na podstawie warunków początkowych oblicza wartości funkcji strumienia i wirowości ze wzorów (38), (39). Następnie, z (40), wylicza prędkość  $\vec{V}$  na podstawie znanych już  $\psi$  i  $\zeta$ .
- `adwekcja.cpp` - przy znajomości składowych  $\vec{V}$ , rozwiązuje równanie adwekcji schematem *leapfrog* (dyskretyzacja (49)) z tak dobranym krokiem czasowym  $dt$ , aby metoda na pewno była stabilna. Funkcje z tego pliku mogą działać na bazie wyników uruchomionych wcześniej odpowiednich procedur z poprzedniej części projektu, lub po wczytaniu wartości prędkości z pliku z danymi.
- `niestabilnosc.cpp` - tutaj następuje badanie niestabilności schematu *leapfrog* oraz tworzenie hybrydy, złożonej z *leapfrog* i, stabilnego niezależnie od  $dt$ , schematu Cranka - Nicolsona (56).

Całość projektu składa się z wymienionych plików, ich plików nagłówkowych i skryptów GNUPLoTa.

Program umożliwia zmianę przekazywanych do funkcji parametrów przepływu:  $Q, \mu, \rho_p$ , czy rozmiarów zastawki  $i_k, j_k$ .

Podczas wielokrotnego uruchamiania programu na różnych danych, uzyskano bardzo dużo rysunków. W następnym rozdziale zawarto i omówiono tylko część z nich - te, które były najbardziej ważne i interesujące.

Projekt został podzielony na trzy części - wyniki będą przedstawione analogicznie.

## 4 Wyniki

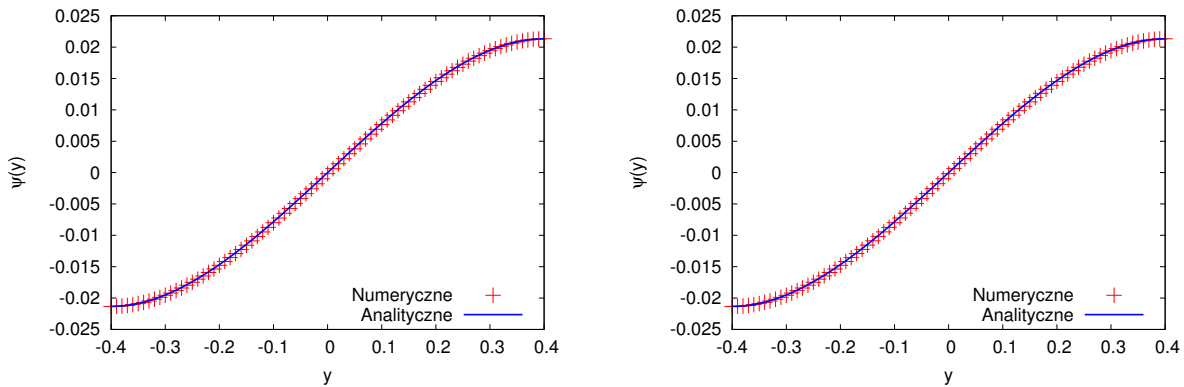
### 4.1 Strumień, wirowość, prędkość

Badamy przepływ przez rurę (rys. 1). Aby ruch odbywał się w prawo, do równań będziemy wstawiać gradient ciśnienia  $Q$  tylko o wartościach ujemnych. Przyjmujemy również  $\mu = 1$ ,  $\rho_p = 1$ . Stałą gęstość cieczy  $\rho_p$  celowo oznaczono indeksem  $p$  dla odróżnienia od gęstości płamy oleju  $\rho(x, y, t)$  w rozwiązywanym później równaniu adwekcji. We wszystkich równaniach całosci projektu przyjęto  $dz = dx = dy = 0.01$ , dlatego w większości przypadków używamy tylko jednego oznaczenia  $dz$ .

#### 4.1.1 Przepływ Poiseuille

Postępujemy zgodnie z warunkami, przyjętymi w analizie teoretycznej - rozdział 2.2.4. Zakładamy, że  $Q = -1$ , a warunki początkowe na strumień i wirowość w każdym punkcie to  $\psi_{i,j} = 0$  i  $\zeta_{i,j} = 0$ .

Z przepisu releksacyjnego: równania Naviera - Stokesa rozwiązujemy zgodnie z równaniami (38) oraz (39). Iterujemy tak długo, aż wartości  $\psi$  i  $\zeta$  w punkcie siatki  $(i, j) = (50, 0)$  nie będą się zmieniać z dokładnością rzędu  $10^{-7}$ . Zgodnie z opisem cieczy lepkiej - rozdział 2.1 - prędkość na ściankach rury jest zerowa, między nimi rośnie, więc maksimum powinna osiągać w środku pomiędzy ściankami (rys. 4). Największa prędkość mogłaby powodować największe różnice w wartościach między kolejnymi iteracjami, dlatego jako kryterium sprawdzania poprawności iteracji wybieramy punkt w środku:  $y = 0$ .

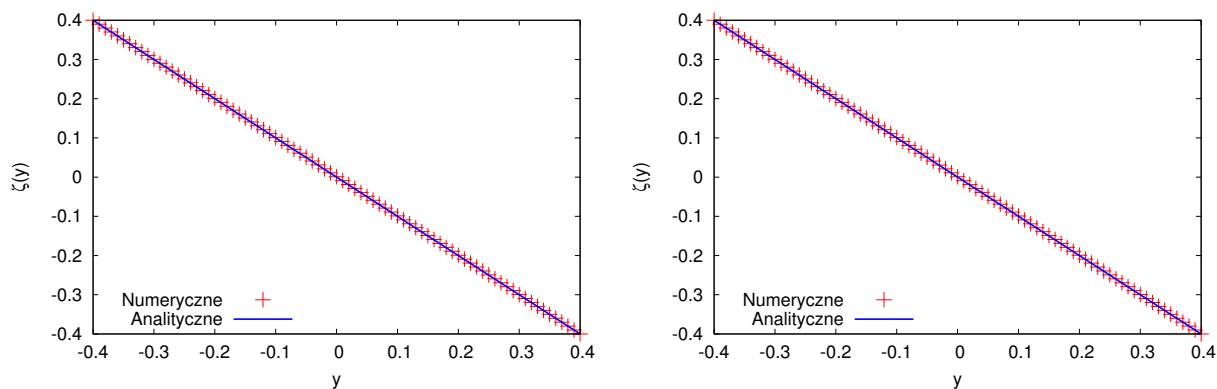


(a) Przekrój dla  $x = 0$

(b) Przekrój dla  $x = 0.7$

Rysunek 2: Funkcja strumienia  $\psi$

Wartości funkcji strumienia są minimalnie zawyżone w stosunku do analitycznego rozwiązania (wzór (27)), natomiast wirowości idealnie pokrywają się z (28) - rys. 2, 3. Funkcję strumienia trudniej było przybliżyć, ponieważ jest wielomianem trzeciego stopnia; funkcja liniowa, opisująca wirowość, nie sprawia większych trudności przy obliczaniu numerycznym.

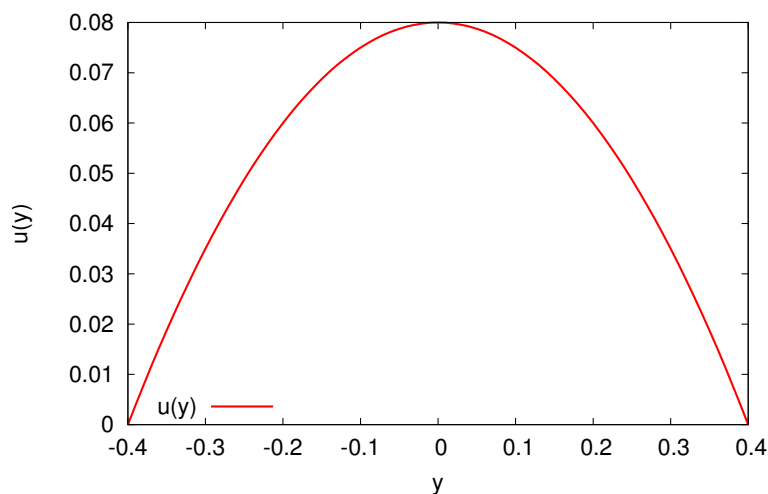


(a) Przekrój dla  $x = 0$

(b) Przekrój dla  $x = 0.7$

Rysunek 3: Funkcja wirowości  $\zeta$

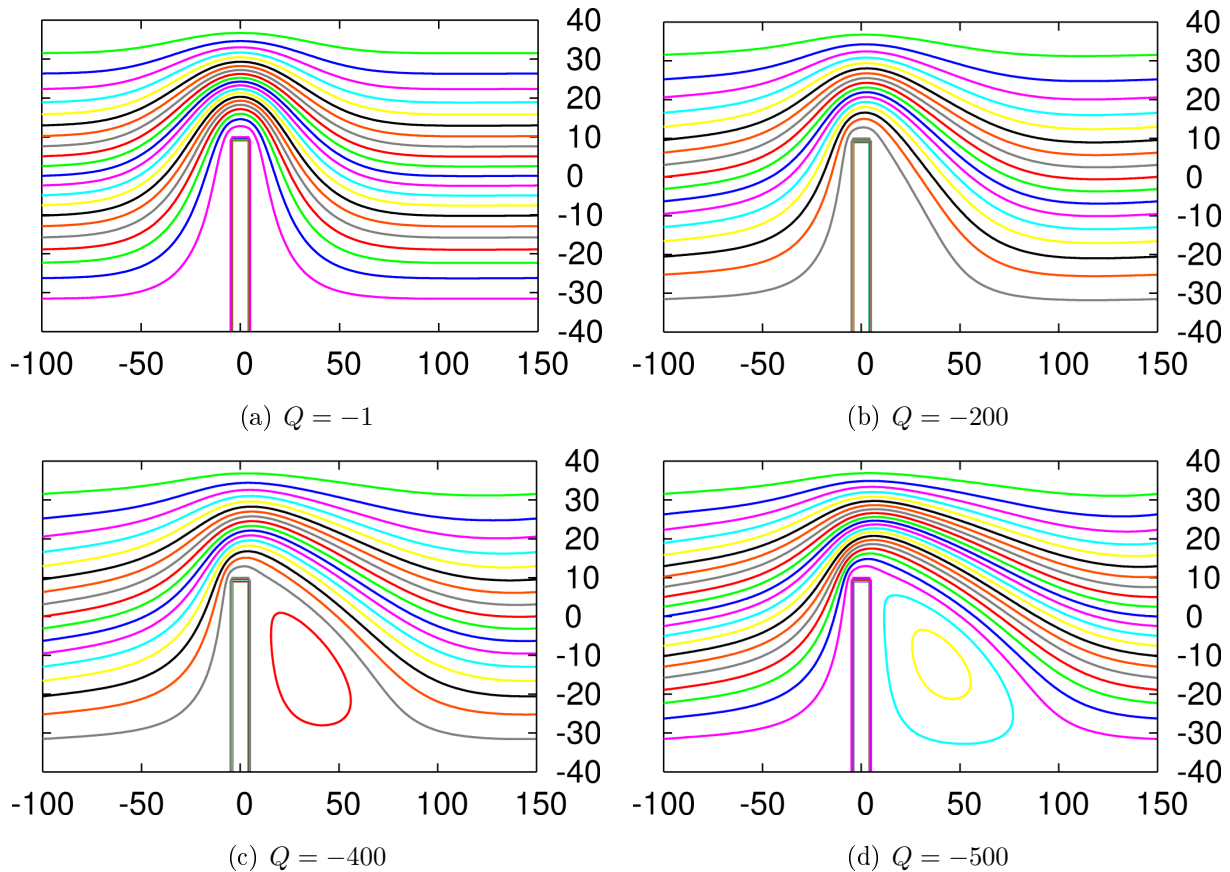
Dla obu funkcji, rysunki (a) i (b) nie różnią się - skoro w rurze nie ma żadnej przeszkody, to przy przyjętych warunkach przepływu, prędkość (rys. 4) dla każdego przekroju  $x = x_0$  jest stała. Ponadto widać, że w punkcie przecięcia styczne do funkcji są do siebie prostopadłe, co jest zgodne z omówioną wcześniej teorią.



Rysunek 4: Prędkość  $u(y)$  - przekrój  $x = 0$

#### 4.1.2 Przepływ z zastawką

Warunki brzegowe wstawiamy z rozdziału 2.2.5, początkowe - z przepływu Poiseuille (rozwiązania analityczne (27), (28)). Zastawka ma wymiary  $i_k = 5$ ,  $j_k = 10$ .



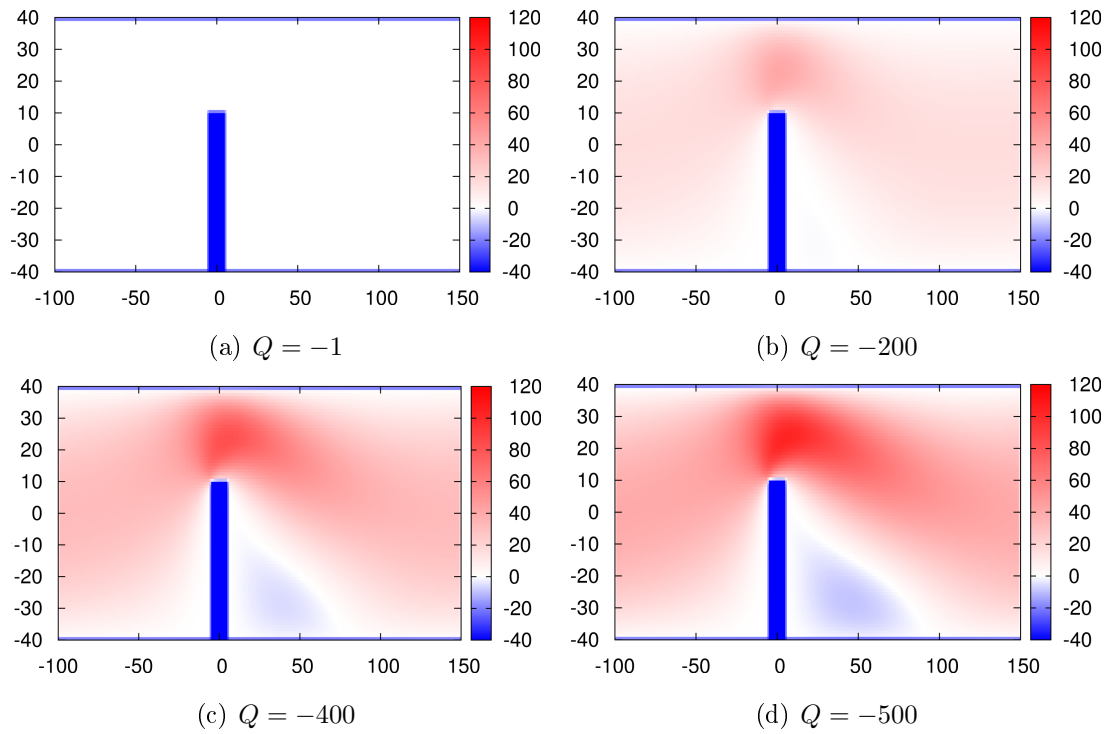
Rysunek 5: Linie strumienia  $\psi$

Dzięki narysowanym liniom strumienia widzimy, w jaki sposób woda opływa zastawkę. Wyniki nie są zaskakujące. Warto zauważyć, że przy odpowiednio dużym ciśnieniu, za przeszkodą tworzy się wir. Im większe ciśnienie, tym bardziej linie są niesymetryczne względem osi  $OY$ . Największą symetrię widać jeszcze dla  $Q = -1$  (rys. 5(a)).

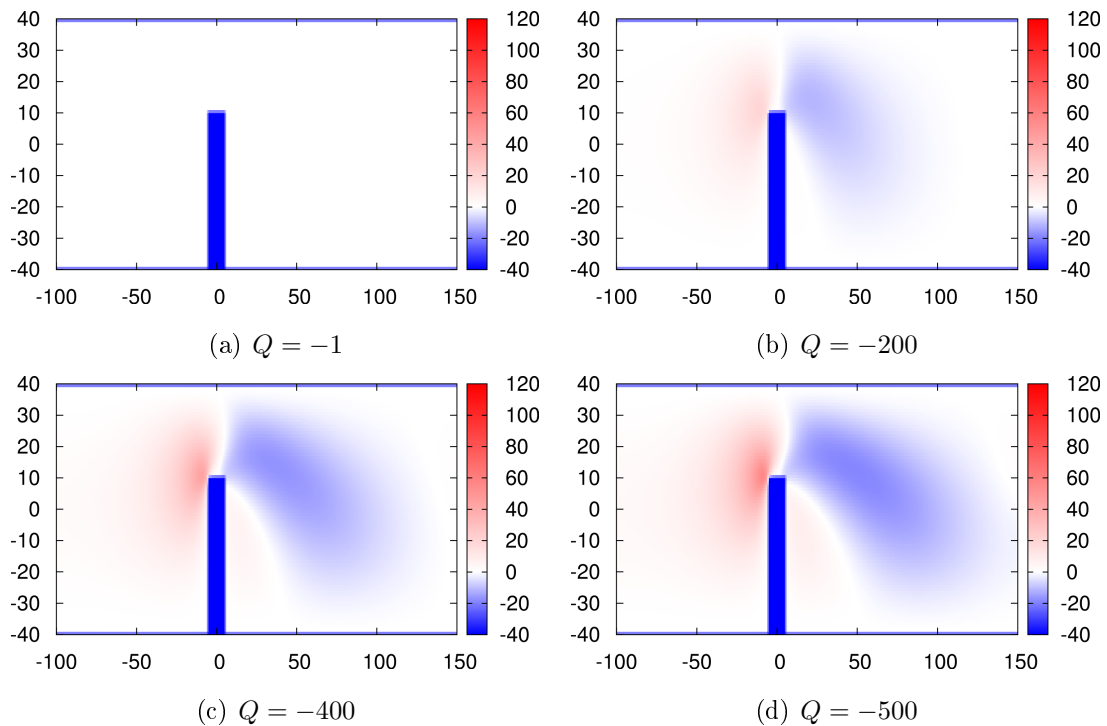
Przy analizie prędkości (rys. 6, 7) także istnieje duży związek pomiędzy wartościami, a ciśnieniem. Im wyższy gradient ciśnienia  $Q$ , tym większa prędkość w okolicy zastawki. Na rysunkach 6(a) i 7(a) widzimy, że różnice prędkości są stosunkowo niewielkie (w przyjętej skali; w rzeczywistości wahania są wystarczająco duże, aby na ich bazie przeprowadzić późniejsze rozważania nad równaniem adwekcji).

Składowa pozioma prędkości (6) jest wyraźnie większa nad zastawką. Taka sama objętość cieczy musi przepłynąć przez węższy obszar. Natomiast tam, gdzie pojawia się wir,  $u$  zaczyna być ujemne - ciecz zawraca.

Prędkość pionowa w wąskim pasie nad przeszkodą staje się bliska zeru - tam ciecz chwilowo zachowuje się podobnie, jakby płynęła przez zwykłą rurę, stąd wydaje się, że  $v = 0$ . Bezpośrednio przed zastawką  $v$  jest dodatnie, ponieważ ciecz, trafiając na nią, zaczyna płynąć w górę osi  $OY$ , natomiast za nią -  $v$  ujemne (ciecz płynie w dół  $OY$ ). W dalszym przepływie pionowa prędkość stabilizuje się ku zeru.



Rysunek 6: Prędkość pozioma  $u$



Rysunek 7: Prędkość pionowa  $v$

## 4.2 Adwekcja

Na cieczy o polu prędkości  $\vec{V}$ , obliczonym tak, jak w rozdziale 4.1.1, rozlewamy plamę oleju o gęstości ustalonej wzorem (50), a w drugiej chwili czasowej: (51). Wzory umiejscawiają plamę

po lewej stronie przeszkody.

Równanie adwekcji rozwiążemy schematem *leapfrog*: dyskretyzacja według (49).

Przy analizie przepływu wystarczyło ustalić krok przestrzenny  $dz = dx = dy = 0.01$ . Teraz będziemy rozwiązywać równanie, aby dowiedzieć się, gdzie znajduje się plama oleju po pewnym czasie, dlatego musimy ustalić krok czasowy:

$$dt = \frac{dx}{\tau V_m}. \quad (79)$$

- $V_m = \sqrt{u^2 + v^2}$  - największa wartość prędkości w granicach pudła obliczeniowego. Jak zauważyliśmy wcześniej (rys. 6 i 7), z pewnością będzie się ona znajdowała w okolicach zastawki
- $\tau \in \mathbb{R}$  - parametr rachunku wskazujący czynnik, o który przyjęty krok czasowy jest mniejszy od kroku krytycznego. W tym rozdziale  $\tau = 4$ , inaczej będzie przy badaniu niestabilności.

Plama, po przepłynięciu przez cały interesujący nas obszar, nie zniknie - pojawi się z powrotem po lewej stronie zastawki. Jest to spowodowane wprowadzonymi, okresowymi warunkami brzegowymi, dlatego na osi  $OX$  po punktach siatki ( $i = 150, j = 100y$ ) w pewnym sensie "znajdują się" punkty ( $i = -100, j = 100y$ ). Dzięki temu zobaczymy, co będzie się działo dalej z plamą - aż do  $T \simeq 100$ .

Dla każdego kroku czasowego policzymy całkę z gęstości

$$I(t) = \int \rho(x, y, t) dx dy \quad (80)$$

...oraz środek pakietu:

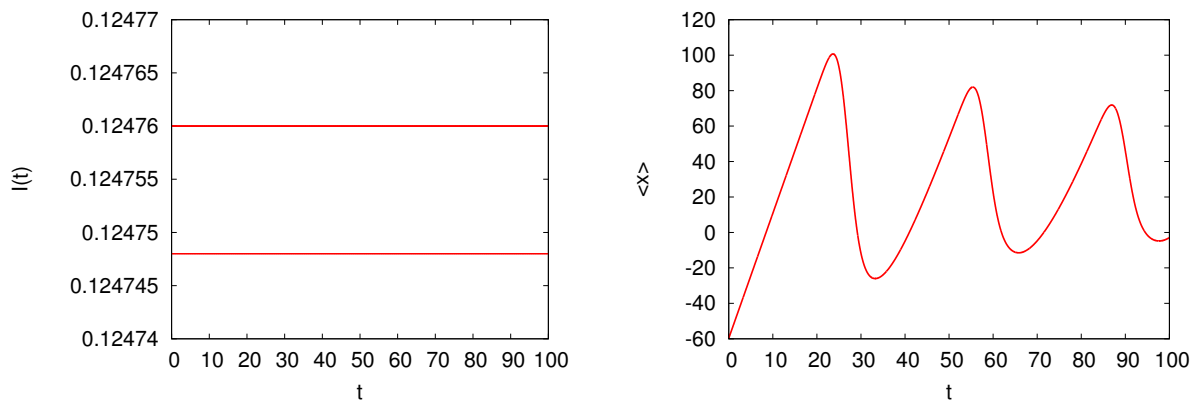
$$\langle x \rangle = \frac{\int x \rho(x, y, t) dx dy}{I(t)}. \quad (81)$$

#### 4.2.1 Przepływ Poiseuille

Użyjemy analitycznie obliczonego pola prędkości cieczy ( $u$  ze wzoru (26),  $v = 0$ ), na bazie którego ciecz będzie się przemieszczać wraz z plamą oleju ( $Q = -1$ ).

Plama zniekształca się wraz z postępowaniem czasu. Środkowa część wyprzedza brzegi, przez co plama przestaje być owalna. Jest to spowodowane prędkością cieczy - jak dowiedzieliśmy się już w rozdziale 2.1, jest ona maksymalna pośrodku - między ściankami. Im bliżej ścianek, tym bliższa zeru. Prędkość ta unosi plamę, więc część plamy będzie płynęła szybciej, część wolniej. Świadczy o tym także, rozprzyskający się w czasie, środek pakietu  $\langle x \rangle$ .

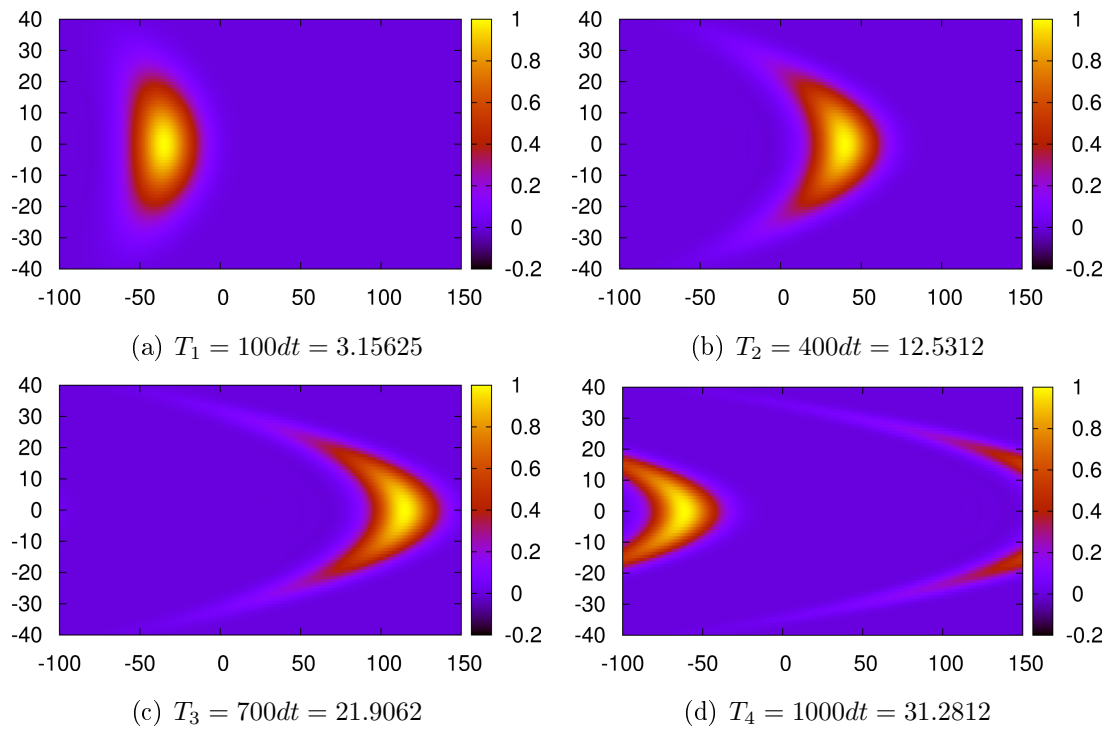
Gęstość plamy w poszczególnych punktach zmienia się, ponieważ jest unoszona przez prędkość cieczy, jednak suma  $\rho$  powinna być stała. Dowodzi tego rysunek 8(a) - wartości całki z gęstości są takie same z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku. Wykres jest narysowany punktami, jednak są one położone tak blisko siebie, że sprawiają wrażenie dwóch prostych - w rzeczywistości całka z gęstości przy każdym kroku zmienia się minimalnie.



(a) Całka z gęstości  $I(t)$

(b) Środek pakietu  $\langle x \rangle$

Rysunek 8: Całki, przepływ Poiseuille



(a)  $T_1 = 100dt = 3.15625$

(b)  $T_2 = 400dt = 12.5312$

(c)  $T_3 = 700dt = 21.9062$

(d)  $T_4 = 1000dt = 31.2812$

Rysunek 9: Gęstość płamy  $\rho$  w odpowiednich chwilach czasowych, przepływ Poiseuille

#### 4.2.2 Przepływ z zastawką

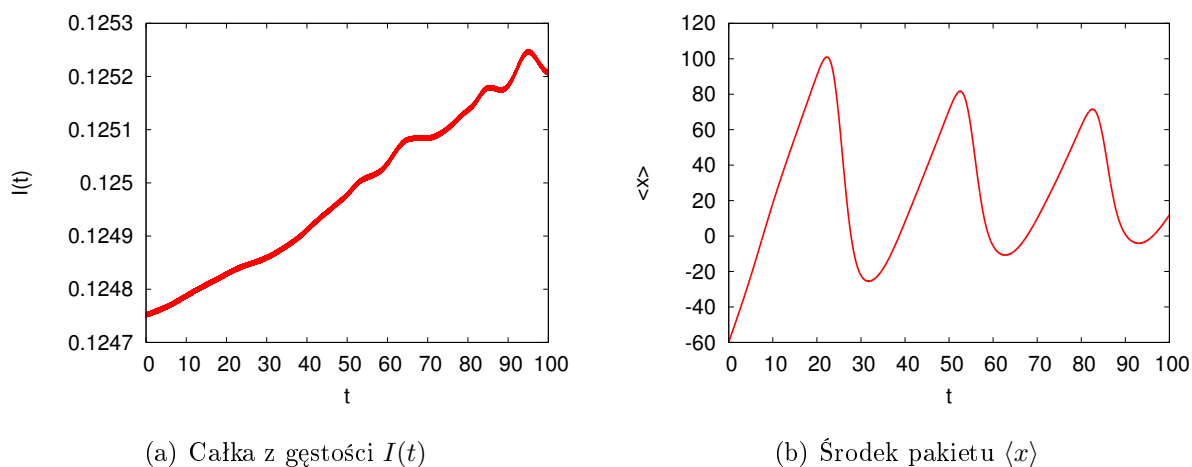
Do rury wstawiamy zastawkę o wymiarach  $i_k = 5$ ,  $j_k = -20$ .

Środek pakietu (rys. 10(b)) rozplywa się prawie identycznie, jak bez zastawki (rys. 8(b)) - w badanym czasie  $T = 100$ , plama zdąży trzykrotnie wrócić z lewej strony po przepłynięciu

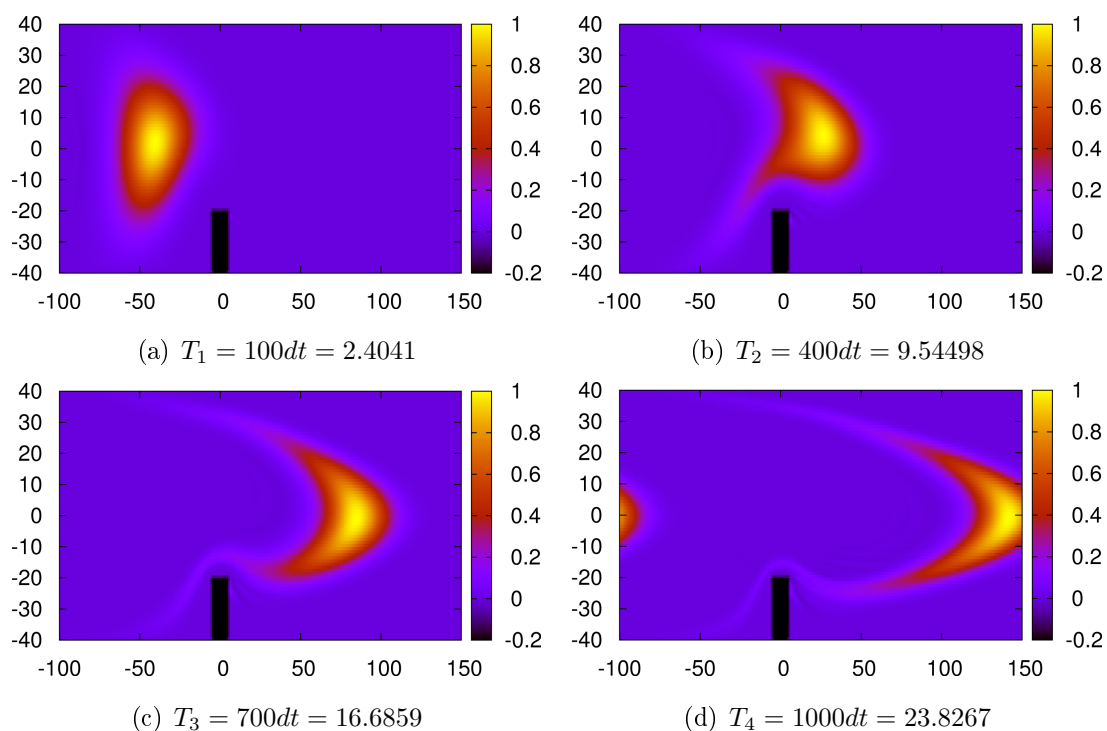


całego pudła. Całka z gęstości (rys. 10(a)) zmienia się tylko nieznacznie - teraz różnica jest wprawdzie wciąż mała, ale o rząd wielkości większa, niż dla przepływu Poiseuille.

Prędkość maksymalna  $V_{max}$  ma wyższą wartość, niż w przepływie bez zastawki. Krok czasowy  $dt$  jest do niej odwrotnie proporcjonalny.



Rysunek 10: Całki, przepływ z zastawką



Rysunek 11: Gęstość płamy  $\rho$  w odpowiednich chwilach czasowych, przepływ z zastawką

## 4.3 Analiza niestabilności schematów

### 4.3.1 Przypadek I: $j_k = -20$

Zastosowany przed chwilą schemat *leapfrog* działał stabilnie dlatego, że użyto kroku czasowego, spełniającego warunek jego stabilności (72):

$$\frac{V\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

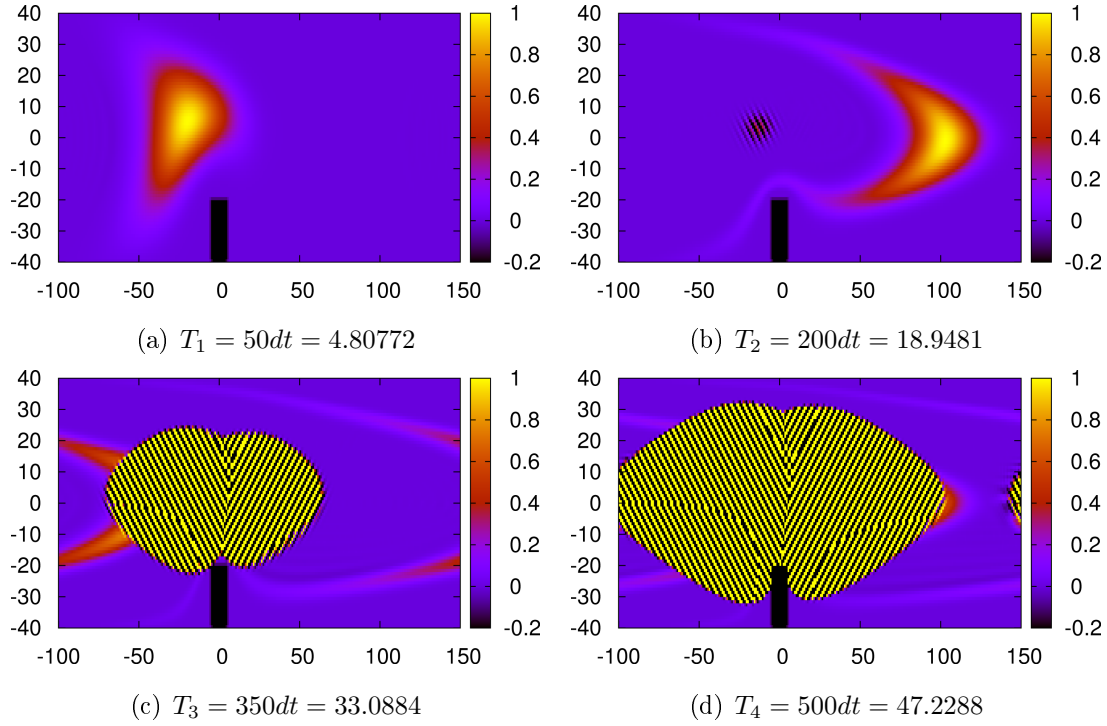
ponieważ dla wykorzystanego kroku:  $dt = \frac{dz}{\tau V_{max}} = \frac{dz}{4V_{max}} < \frac{dz}{V_{max}}$ . Przepływ plamy dla takich warunków obserwowaliśmy na rysunkach 11.  $\tau = 4$  zostało wprowadzone dla bezpieczeństwa - zależało nam na tym, żeby schemat na pewno był stabilny. Co prawda, z warunku (72) wynikałoby, że gwarancją stabilności jest już  $\tau = 1$ , ale należy pamiętać, że analizę von Neumanna przeprowadziliśmy dla jednowymiarowego przepływu o stałej prędkości unoszenia. Nie możemy być pewni, że to ograniczenie kroku czasowego jest wystarczające również dla dwóch wymiarów i zmiennego pola prędkości  $\vec{V}(x, y)$ . Poza tym, musimy wziąć pod uwagę też to, że obliczenia numeryczne nie są dokładne. Nawet najlepsze typy liczbowe w językach programowania mają ograniczenia i w efekcie ułamki są zaokrąglane.

Spróbujmy teraz zmniejszyć  $\tau$  do tego stopnia, by móc zaobserwować niestabilność. Obszary niestabilności możemy zobaczyć już od  $\tau = 1.01$ . Być może jest to możliwe przy jeszcze większych wartościach  $\tau$ , ale niestabilność mogłaby pojawiać się na tyle późno, że trzeba by przeprowadzić obliczenia i tworzyć rysunki aż do bardzo odległego czasu  $T$ . Trwałoby to z pewnością bardzo długo, więc dalsze obliczenia będziemy zawsze ograniczać do maksymalnego czasu  $T = 50$  (do osiągnięcia tego czasu prowadzone są rachunki i zapisywane są do plików wartości całek  $I(t)$ ,  $\langle x \rangle$ ; same rysunki gęstości niekoniecznie muszą być tworzone aż do czasu  $T$ , ponieważ program generuje ich konkretnie 10 w jednakowych dla danego przypadku odstępach czasu, niezależnie od czasu  $T$  - np. w rozdziale 4.2.2 pierwszym rysunkiem był 11(a), dziesiątym 11(d), a sześć środkowych zostało pominiętych).

Wyniki operacji widzimy na rys. 12. Prawie czterokrotnie większy krok czasowy istotnie przyspieszył uzyskanie rozwiązania, jednak wyniki są nie do przyjęcia. Dla czasu  $50dt$  - rys. 12(a) - schemat jeszcze działa dobrze, jednak już na następnej ilustracji widzimy powstające niestabilności, rozszerzające się wraz z czasem. Rozprzestrzeniają się od miejsc nad zastawką - tam prędkość cieczy jest największa, a właśnie  $V_{max}$  stawia ograniczenia na  $dt$ .

Z analizy von Neumanna (rozdział 2.4.3) wiemy, że schemat Cranka - Nicolsona powinien sobie poradzić z obliczeniem wyników dla użytego  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$ . Jest to przepis iteracyjny, dlatego nietrudno zgadnąć, że zaoszczędzoną ilość obliczeń przez zwiększenie kroku  $dt$  stracimy na wielokrotne iteracje. Spróbujmy więc połączyć obie metody w jeden, zoptymalizowany schemat - CN z całą pewnością trzeba użyć na obszarze nad zastawką, jednak w pozostałych miejscach metoda *leapfrog* powinna wystarczyć.

Dla tego celu stworzono w programie dodatkową funkcjonalność, która pozwala na użycie

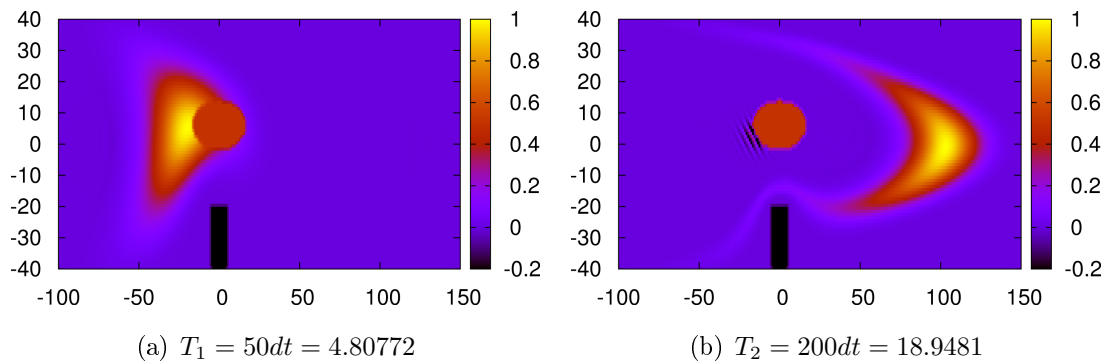


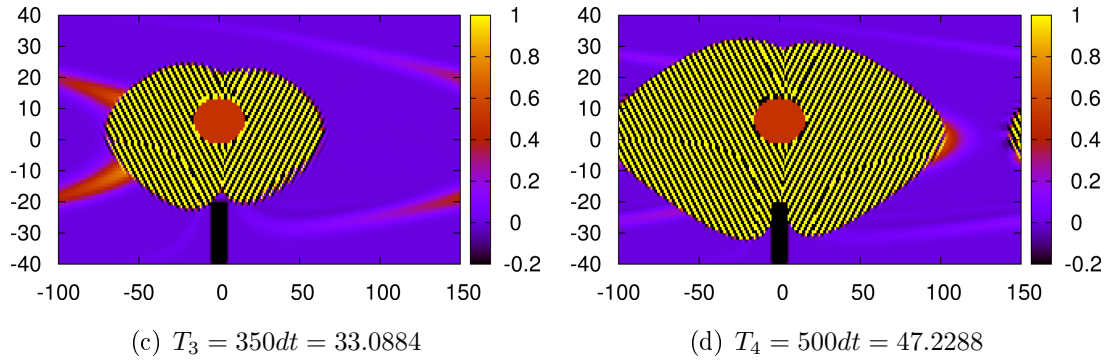
Rysunek 12: Gęstość płamy  $\rho$ , *leapfrog* z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$ . Pojawiające się niestabilności ujawniają się przez ogromne - dla programu nieskończone - wartości. Ograniczenie skali mapy gęstości do  $[-0.2, 1]$  powoduje wyraźne wyrysowanie niestabilności w postaci czarno - żółtych plam (wartości są nieskończone na przemian dodatnio i ujemnie).

schematu Cranka - Nicolsona w tych punktach, gdzie

$$\beta dt \geq \frac{dx}{V_{i,j}}, \quad V_{i,j} = \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2}. \quad (82)$$

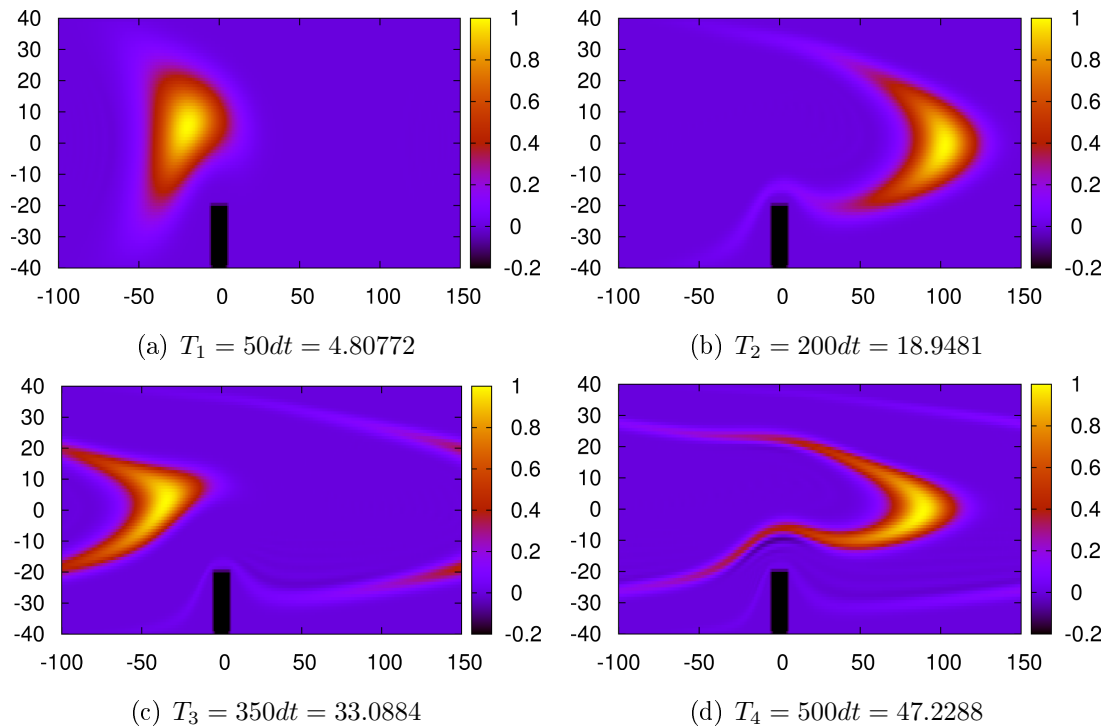
$\beta \in \mathbb{R}$  jest stałą, dobieraną na podstawie badań tak, by CN zastosowano na obszarze o optymalnej wielkości - na tyle dużym, żeby obejmował wszystkie punkty, wprowadzające niestabilność, ale i jak najmniejszym, by nie trzeba było niepotrzebnie obliczać iteracyjnie wartości tam, gdzie wystarczyłby jawny schemat.





Rysunek 13: Gęstość plamy  $\rho$ , *leapfrog* z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$ , zaznaczone na czerwono na tle niestabilności obszary to punkty, zakwalifikowane przez program do schematu CN na podstawie kryterium (82):  $1.1dt \geq \frac{dx}{V_{i,j}}$ .

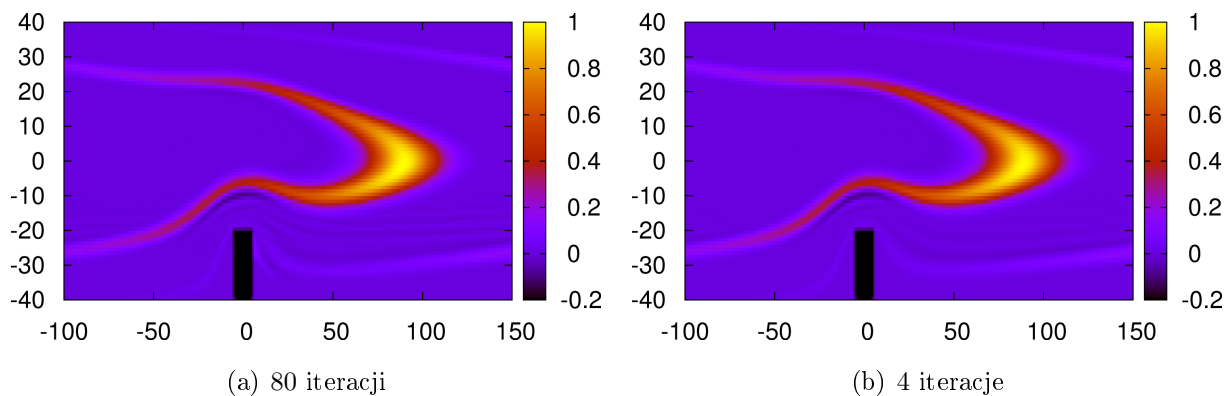
Stałą  $\beta$  wprowadzamy dla pewności stabilności obliczeń - tak, jak poprzednio, nie możemy do końca ufać warunkowi (72) - wynika on z analizy stabilności dużo prostszego przypadku, niż badany. Po uruchomieniu programu dla różnych wartości  $\beta$  okazuje się, że najmniejszą możliwą liczbą, przy rozważanych warunkach, jest  $\beta = 1.1$ . Najpierw liczymy sam schemat *leapfrog* z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$  i zaznaczamy te punkty, które program zakwalifikował do schematu Cranka - Nicolsona (13). Kolejne rysunki (14) przedstawiają już wyniki hybrydy obu schematów.



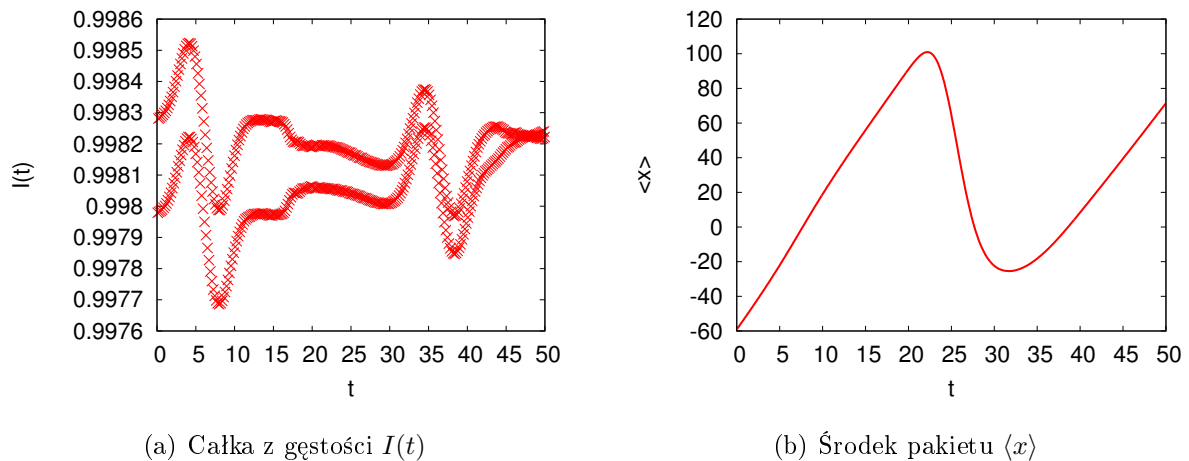
Rysunek 14: Gęstość plamy  $\rho$ , hybryda *leapfrog* i Cranka - Nicolsona z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$

Hybryda zadziałała prawidłowo. Na rys. 13 widać, że wystarczyło zastosować schemat Cranka - Nicolsona na niewielkim obszarze (program wypisał, że wynik poprawiono w 413 punktach).

Oprócz wartości  $\tau$  i  $\beta$ , należało także ustalić warunek zakończenia iteracji schematu CN. Sprawdzono wyniki dla różnych ilości iteracji - starając się wybrać jak najmniejszą z możliwych, by nie obciążać rachunku wieloma iteracjami. Okazuje się, że przy zwiększaniu liczby iteracji od 4, wykresy gęstości sprawiają wrażenie takich samych. Dla porównania pokazano zdjęcia dla 80 i 4 iteracji (rys. 15). Przy trzech iteracjach widać było już niewielkie różnice w położeniu plamy, a przy jednej - pojawiała się niestabilność. Kłopot sprawiał jeszcze środek pakietu, który przy każdej następnej iteracji przedstawiał się zupełnie inaczej - z każdą iteracją podnosił się coraz wyżej. Ostatecznie wybrano 8 iteracji - dla tej ilości  $\langle x \rangle$  (rys. 16(b)) jest najbliższy wykresowi dla *leapfrog* przy  $dt$ , gwarantującym stabilność (rys. 10(b)). Dlatego, dla pewności poprawności wyników, tak wcześniejsze, jak i późniejsze obliczenia przy pomocy CN będą prowadzone dla ośmiu iteracji. Według rys. 10(a),  $I(t)$  tak, jak oczekujemy, zmienia się nieznacznie.



Rysunek 15: Gęstość plamy  $\rho$ , hybryda z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$  dla różnej ilości iteracji. Oba zdjęcia zrobiono w chwili  $500dt = 47.2288$ .



Rysunek 16: Hybryda z  $dt = \frac{dx}{1.01V_{max}}$  dla 8 iteracji.

Podsumowując - skoro w hybrydzie mogliśmy użyć niemalże czterokrotnie większego kroku czasowego, wyniki otrzymaliśmy po proporcjonalnie mniejszej ilości iteracji czasowych. Dla

Tabela 1: Porównanie schematów dla  $j_k = -20$

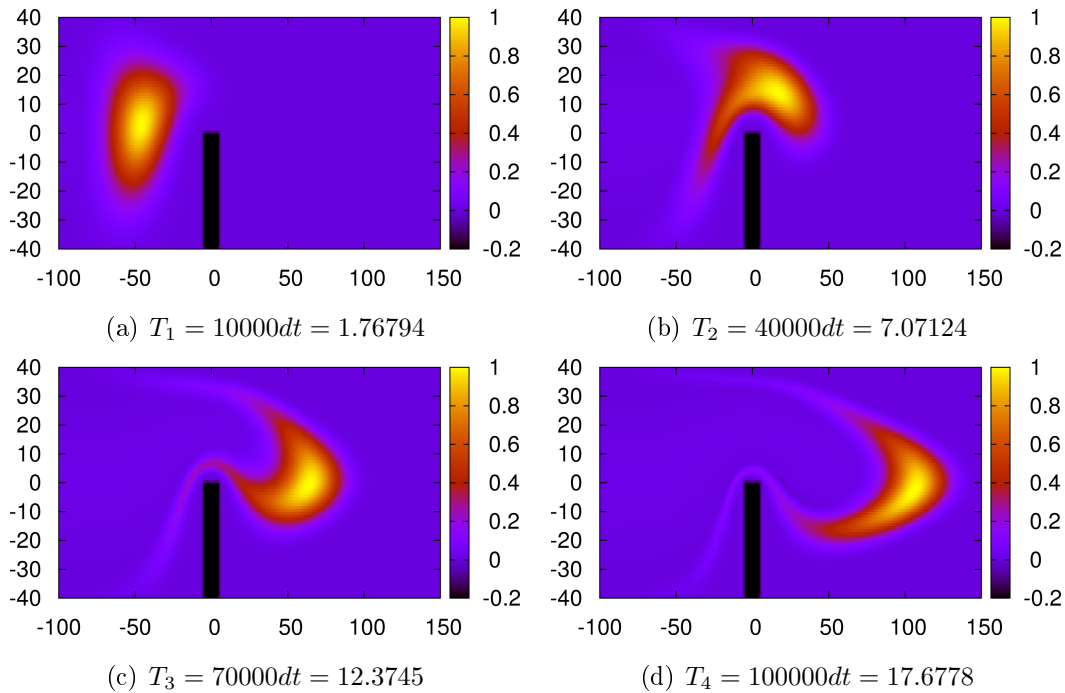
|                              | $dt$      | Ilość iteracji | Ilość operacji |
|------------------------------|-----------|----------------|----------------|
| Stabilny <i>leapfrog</i>     | 0.0238029 | 2100           | 41178900       |
| Crank - Nicolson             | 0.0942691 | 530            | 83142160       |
| Hybryda <i>leapfrog</i> + CN | 0.0942691 | 530            | 12143890       |

każdej z nich na części punktów siatki zastosowaliśmy iteracyjny schemat Cranka - Nicolsona, jednakże ostatecznie ilość operacji z tabeli 1 dowodzi, że hybryda zaoszczędziła ponad 70% obliczeń w stosunku do *leapfrog* i aż 85% do samego CN (podliczano każdorazowo operację obliczania gęstości dla danego punktu; tam, gdzie zastosowano CN - operacja taka zachodziła ośmiokrotnie, a każda z tych ośmiu iteracji jest wliczona do ostatecznej sumy operacji).

#### 4.3.2 Przypadek II: $j_k = 0$

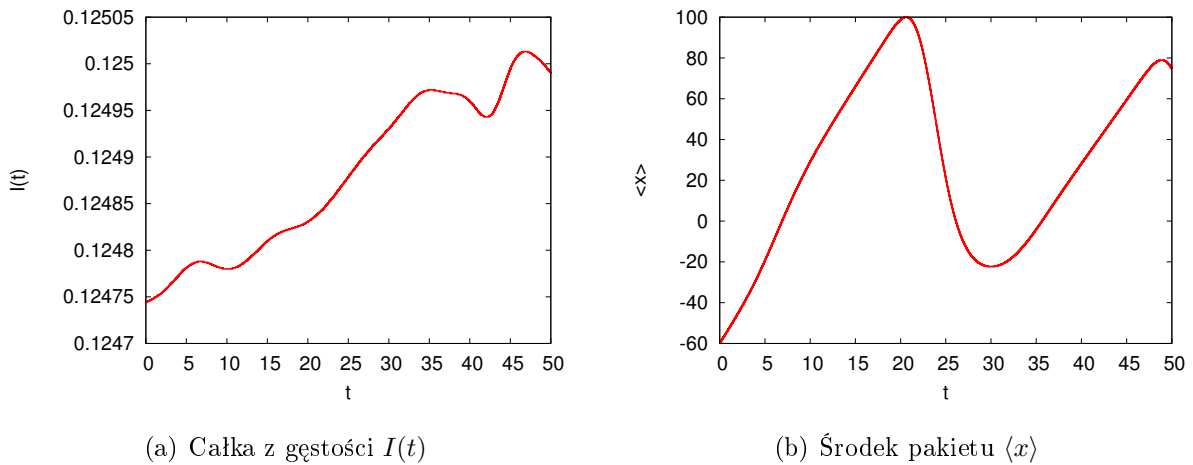
Podobne badania, jak w rozdziale 4.3.1, przeprowadzimy dla zastawki:  $j_k = 0$ . Taka sama objętość cieczy musi przepłynąć przez jeszcze węższy obszar, dlatego nad przeszkodą wytworzy się większa prędkość. Zmienimy wartość  $\tau$  na 0.01 (dla takiej liczby odpowiednio szybko obserwujemy duży wybuch niestabilności, ponadto jeszcze bardziej ograniczymy ilość obliczeń - krok czasowy będzie dużo większy, niż dla stabilnego schematu *leapfrog*, gdzie  $\tau = 4$ ).

Na początek zobaczmy, jak wygląda przepływ przy tak wysokiej zastawce - stabilny *leapfrog*:



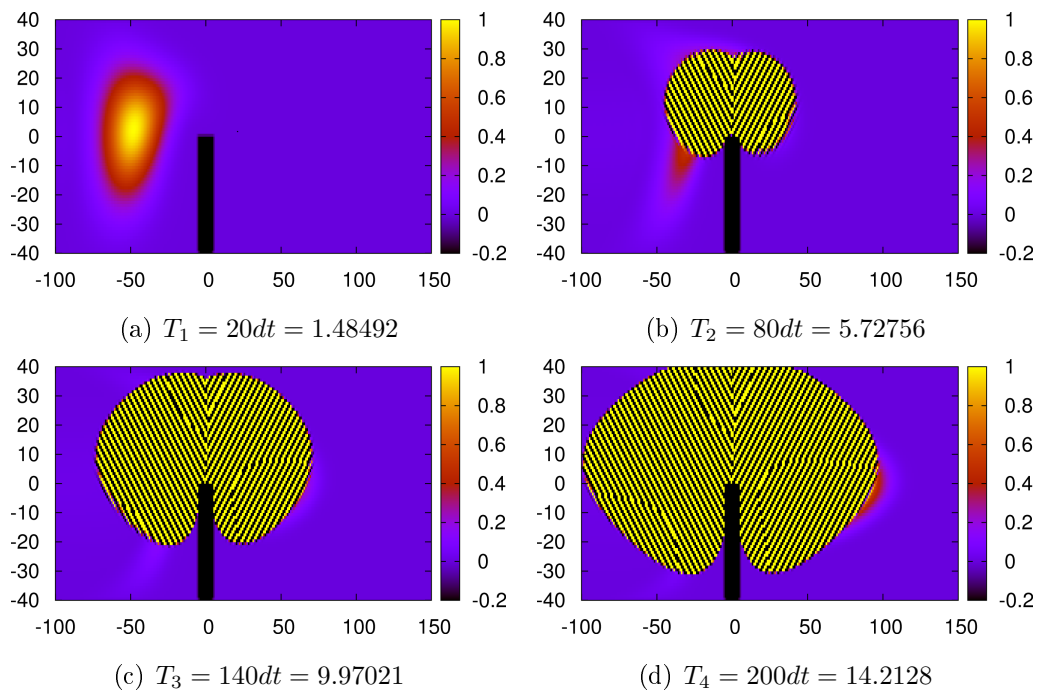
Rysunek 17: Gęstość plamy  $\rho$  - *leapfrog*,  $dt = \frac{dx}{4V_{max}}$ ,  $j_k = 0$

Z powodu dużej wartości prędkości maksymalnej  $V_{max}$ , krok czasowy jest bardzo mały, więc obliczenia były długotrwałe.



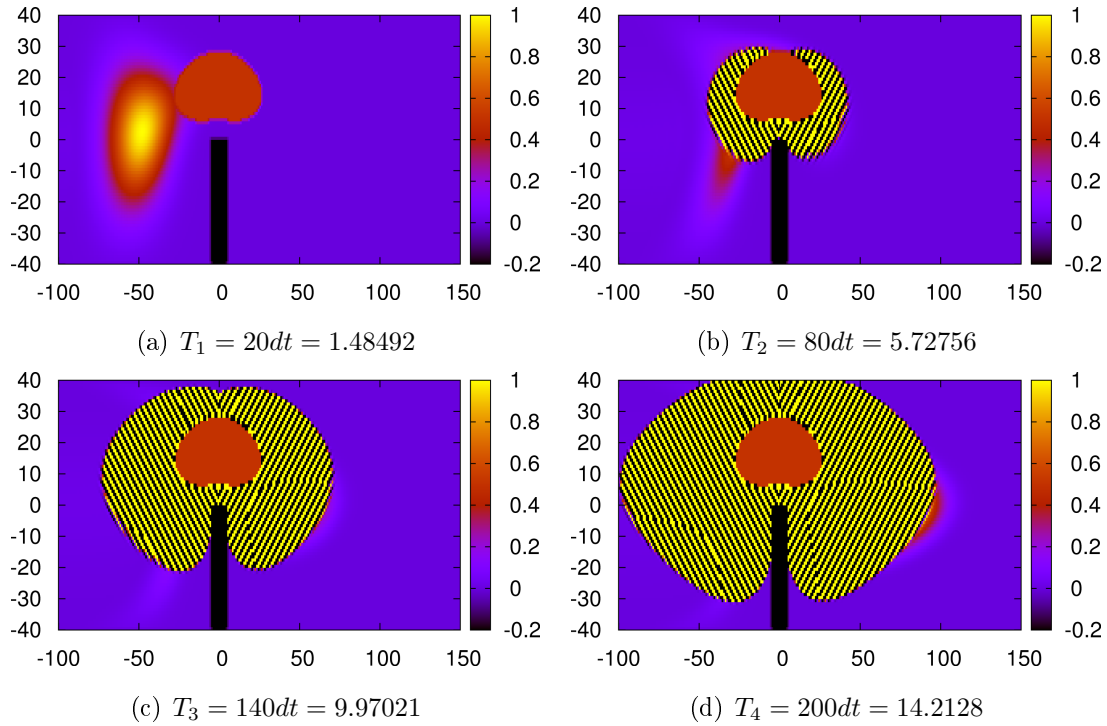
Rysunek 18: *Leapfrog*,  $dt = \frac{dx}{4V_{max}}$ ,  $j_k = 0$

Na rys. 18(a) widzimy, że  $I(t)$  nie zmienia się znacząco - wyniki są poprawne. Środek pakietu (18(b)) wygląda już mniej płynnie, niż dla niższej przeszkody (głównie w okolicach  $t = 8$  - gdy plama przepływa nad przeszkodą).



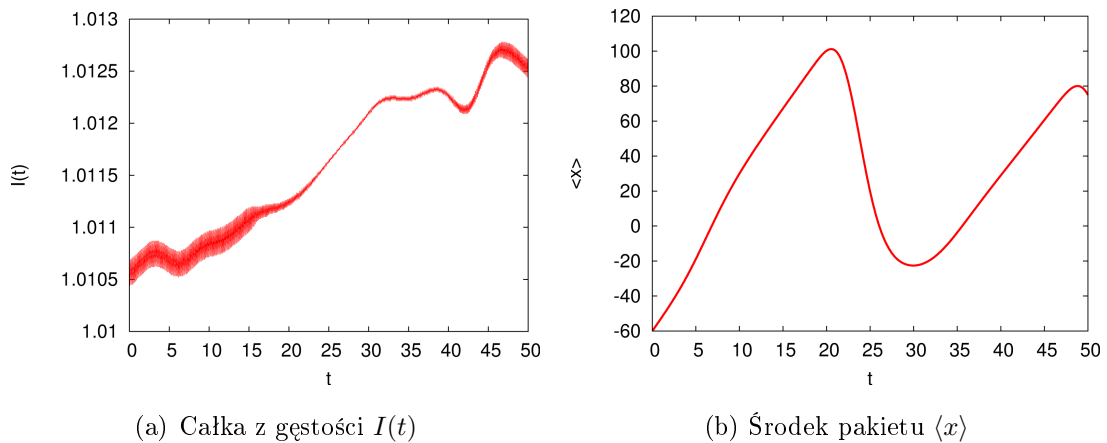
Rysunek 19: Gęstość plamy  $\rho$ , *leapfrog* z  $dt = \frac{dx}{0.01V_{max}}$

Rysunek 19 obrazuje niestabilności dla 400 razy większego  $dt$ . Po wielu uruchomieniach dla różnych wartości  $\beta$  ustalono, że najlepsze wyniki otrzymuje się dla  $\beta = 1.25$ . Na podstawie zależności (82), powoduje to zaznaczenie 999 punktów:



Rysunek 20: Gęstość płamy  $\rho$ , *leapfrog* z  $dt = \frac{dx}{0.01V_{max}}$ , zaznaczone źródło niestabilności

Poprawa obliczeń *leapfrog* schematem Cranka - Nicolsona daje świetne efekty, ponieważ dla stosunkowo dużego kroku czasowego  $dt$  otrzymujemy satysfakcjonujące wyniki:

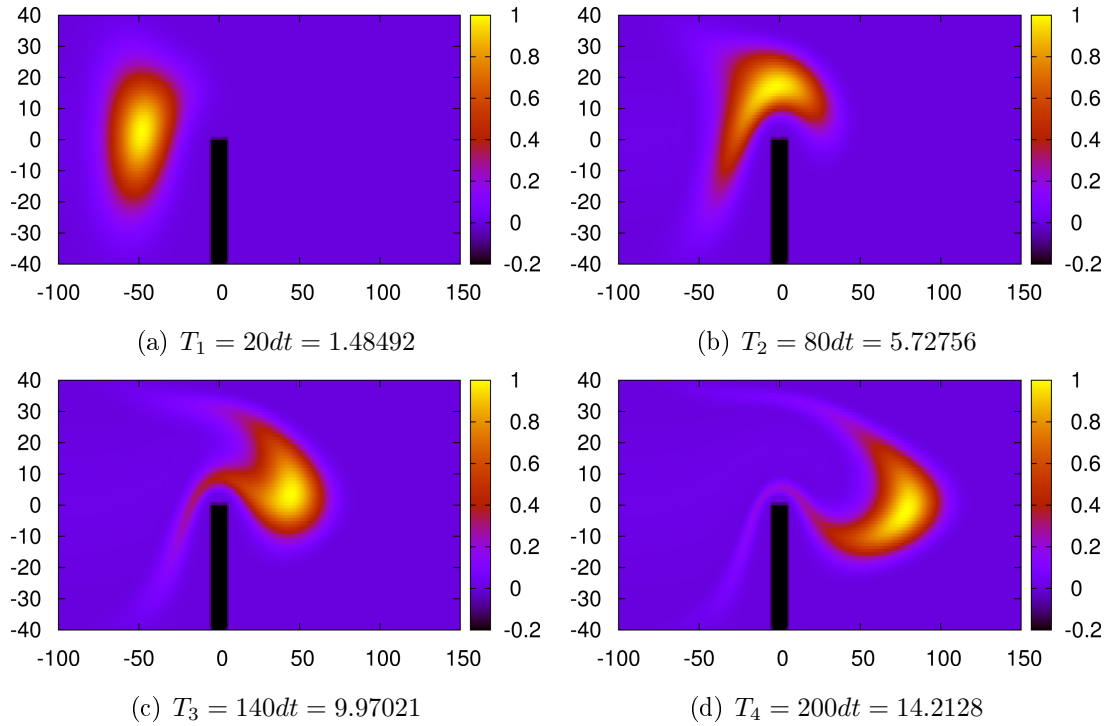


Rysunek 21: Hybryda z  $dt = \frac{dx}{0.01V_{max}}$ .

Całki z rys. 21 wyglądają bardzo podobnie do tych, które obliczono na podstawie stabilnego schematu *leapfrog* (rys. 18). Płama oleju (rys. 22) przemieszcza się zgodnie z przewidywaniami, płynnie, bez żadnych oznak niestabilności.

Zestawienie z tabeli 2 jeszcze raz udowadnia wyższość przygotowanej, hybrydowej metody. Zwiększyliśmy krok czasowy 400-krotnie (w stosunku do obliczeń ze stabilnego *leapfrog*) i zaoszczędziliśmy aż 98.37% obliczeń (które byłyby wykonane przy metodzie *leapfrog*), ponieważ





Rysunek 22: Gęstość płamy  $\rho$ , hybryda *leapfrog* i Cranka - Nicolsona z  $dt = \frac{dx}{0.01V_{max}}$

Tabela 2: Porównanie schematów dla  $j_k = 0$

|                              | $dt$        | Ilość iteracji | Ilość operacji |
|------------------------------|-------------|----------------|----------------|
| Stabilny <i>leapfrog</i>     | 0.000176777 | 282842         | 1189056242     |
| Crank - Nicolson             | 0.0707107   | 707            | 109664184      |
| Hybryda <i>leapfrog</i> + CN | 0.0707107   | 707            | 19358367       |

ilość operacji jest mniejsza aż o 2 rzędy wielkości. W tym przypadku schemat *leapfrog* okazał się na tyle niepraktyczny, że nawet sam niejawny schemat Cranka - Nicolsona wymaga ponad dziesięciokrotnie mniejszej ilości operacji.

## 5 Podsumowanie

Celem pracy było badanie niestabilności schematów różnicowych, a przede wszystkim stworzenie nowego schematu, łączącego w sobie prostotę obliczeń *leapfrog* oraz stabilność metody Cranka - Nicolsona. Udało się to zrealizować - co więcej, uzyskano bardzo ciekawe wyniki.

*Leapfrog* posiada ograniczenie na krok czasowy, uniemożliwiające zwiększenie  $dt$ . Można by to zrobić jedynie, zmniejszając równocześnie krok przestrzenny, ale byłoby to równie niepraktyczne.

Z kolei czysty schemat Cranka - Nicolsona moglibyśmy uznać za najlepszy, ponieważ nie ma

takiego ograniczenia. Minusem jest jednak fakt, iż mamy do czynienia z metodą iteracyjną, a to zawsze spowalnia uzyskiwanie rozwiązania i często robi ogromną różnicę w szybkości działania. Szczególnie w naszym przypadku, gdzie obliczenia prowadzimy w dwóch wymiarach na dość dużej siatce. Dla zastawki  $j_k = -20$  wymagał aż dwukrotnie więcej operacji, niż krytykowany *leapfrog* (tab. 1).

Optymalne połączenie tych dwóch schematów okazało się być idealne - wyniki mówią same za siebie, wystarczy spojrzeć na zestawienie w tabelach 1 i 2, głównie na ilość dokonanych operacji. W obu przypadkach, liczby przemawiają na korzyść hybrydy. Warto zwrócić uwagę, że im większa prędkość maksymalna  $V_{max}$  cieczy, tym hybryda odnosi większy sukces. Jest to spowodowane właśnie ograniczeniem kroku czasowego w schemacie *leapfrog* -  $dt$  jest odwrotnie proporcjonalne do  $V_{max}$ , natomiast nie przeszkadza to schematowi Cranka - Nicolsona, użytemu w hybrydzie dla odpowiedniego obszaru. Wówczas nawet sam niejawny CN, zastosowany dla całej siatki obliczeń, okazuje się być dużo lepszy, niż *leapfrog*. Oczywiście, o czym równie jasno świadczą wspomniane tabele, jawno - niejawny schemat hybrydowy, zaproponowany i przetestowany w tej pracy inżynierskiej, okazał się bardziej wydajny numerycznie, niż obie jego części składowe - CN oraz *leapfrog*.

## Literatura

- [1] Bartłomiej Szafran: *Wykłady z przedmiotu Inżynierskie Metody Numeryczne*, Wydział FilS AGH, Kraków marzec - grudzień 2010
- [2] Krystyna Jeżowiecka-Kabsch, Henryk Szewczyk: *Mechanika płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001
- [3] Granville Sewell: *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*, wydawnictwo Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey 2005
- [4] Rolf H. Sabersky, Allan J. Acosta, Edward G. Hauptmann: *Fluid flow. A first course in fluid mechanics*, wydawnictwo Macmillan, New York 1989
- [5] Steven E. Koonin: *Computational Physics*, wydawnictwo The Benjamin/Cummings, Menlo Park, California 1986
- [6] Włodzimierz Stankiewicz, Jacek Wojtowicz: *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część druga*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1975