Liczby trójkątne – ciąg dalszy

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000, \ldots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000, \ldots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}$ to $5 \cdot 10^{2k+1} + 5 \cdot 10^{k}$

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000, \ldots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}$ to $5 \cdot 10^{2k+1} + 5 \cdot 10^k$

2. To samo dla liczb:

   $210,\ 20100,\ 2001000, \ldots$

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000,\ldots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k \text{ zer}}\boxed{5}\boxed{k \text{ zer}}$ to $5\cdot 10^{2k+1}+5\cdot 10^k$

2. To samo dla liczb:

   $210,\ 20100,\ 2001000,\ldots$

3. To samo dla liczb:

   $45,\ 4950,\ 499500,\ldots$

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000,\dots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}$ to $5 \cdot 10^{2k+1} + 5 \cdot 10^k$

2. To samo dla liczb:

   $210,\ 20100,\ 2001000,\dots$

3. To samo dla liczb:

   $45,\ 4950,\ 499500,\dots$

4. (*)To samo dla liczb:

   $21,\ 2211,\ 222111,\ 22221111$

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby 55, 5050, 500500, 50005000, ... są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}$ to $5 \cdot 10^{2k+1} + 5 \cdot 10^{k}$

2. To samo dla liczb:

   210, 20100, 2001000, ...

3. To samo dla liczb:

   45, 4950, 499500, ...

4. (*)To samo dla liczb:

   21, 2211, 222111, 22221111

5. Dana jest liczba m, $m = \Delta_n$. Wykaż, że

$$n = \lfloor \sqrt{2m} \rfloor.$$

Liczby trójkątne – problemy

1. Wykaż, że liczby $55,\ 5050,\ 500500,\ 50005000, \dots$ są wszystkie liczbami trójkątnymi.

   Wskazówka: liczba postaci $\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}\boxed{5}\boxed{k\ \text{zer}}$ to $5 \cdot 10^{2k+1} + 5 \cdot 10^k$

2. To samo dla liczb:

   $210,\ 20100,\ 2001000, \dots$

3. To samo dla liczb:

   $45,\ 4950,\ 499500, \dots$

4. (*)To samo dla liczb:

   $21,\ 2211,\ 222111,\ 22221111$

5. Dana jest liczba m, $m = \Delta_n$. Wykaż, że

   $$n = \lfloor \sqrt{2m} \rfloor.$$

6. Wykaż, że wszystkie *parzyste liczby doskonałe* są liczbami trójkątnymi.

Liczby trójkątne – problemy; c.d

7. Pokaż, że

$$\Delta_n^2 - \Delta_{n-1}^2 = n^3$$

i w oparciu o ten wzór wykaż raz jeszcze

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^3 = \Delta_n^2.$$

Liczby trójkątne – problemy; c.d

7. Pokaż, że
$$\Delta_n^2 - \Delta_{n-1}^2 = n^3$$
i w oparciu o ten wzór wykaż raz jeszcze
$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^3 = \Delta_n^2.$$

8. Pokaż, że każda liczba trójkątna Δ_n, za wyjątkiem Δ_1 i Δ_3 jest sumą trzech liczb trójkątnych.

   Wskazówka: Rozważ trzy możliwości: (1)$n = 3k$; (2)$n = 3k + 1$ i (3)$n = 3k + 2$. Dla pierwszego przypadku (sprawdź!):
$$\Delta_{3k} = \Delta_{k-1} + \Delta_{2k} + \Delta_{2k}.$$
   Spróbuj znaleźć analogiczne wzory dla Δ_{3k+1} i Δ_{3k+2}.

Liczby trójkątne – problemy; c.d

Liczby trójkątne – problemy; c.d

9. (*)Znajdź liczby trójkątne, które *podwojone* dają też liczby trójkątne, a konkretnie – pokaż, że wszystkie pary (x, y) są zawarte w ciągu nieskończonym:
(1)
$x_1 = 2,\ y_1, \quad x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 2,\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 3.$
wskazówka: pomocna tożsamość
$$2(3x+2y+2)(3x+2y+3)-(4x+3y+3)(4x+3y+4) = 2x^2+2x-y^2-y$$
10. (*) W oparciu o powyższe twierdzenie wykaż, że rozwiązaniem równania
$$\frac{1}{\Delta_x} + \frac{1}{\Delta_{x+1}} = \frac{1}{\Delta_y}$$
jest $\Delta_y = 2\Delta_{x/2}$.
wskazówka: równanie (1) jest równoważne równaniu
$$x(x+2) = 2y(y+1),$$
z którego m.in. wynika parzystość x.