Zestaw nr.8: Podzielność liczb, kongruencje – różne problemy

Zad.1 Rozwiąż układ:

$$\begin{aligned} ab &\equiv 1 \pmod{c} \\ ac &\equiv 1 \pmod{b} \\ bc &\equiv 1 \pmod{a} \end{aligned}$$

gdzie a, b, c są względnie pierwsze.

Zad.2 Wykaż, że jeżeli $30 \mid a+b+c$ to $30 \mid a^5+b^5+c^5$

Zad.3 Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i wszystkie naturalne n, takie, że

p, $p+2$, $p+2^n$, $p+2^n+2$ są wszystkie liczbami pierwszymi.

Zad.4 Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 2^{999}.

Zad.5 Udowodnij, że liczba $4^{546}+545^4$ jest złożona (konkretnie – podzielna przez 17).

Zad.6 Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczb: 9^{99}, 7^{99}. (podobne zadania: zestaw 6).

Zad.7 Znajdź wszystkie takie pary liczb pierwszych p, q, że $7p+q$ oraz $pq+11$ są również liczbami pierwszymi.

Zad.8 Korzystając z własności kongruencji, sprawdź, że dla każdej liczby naturalnej n :
a) 13 jest dzielnikiem $4^{(2n+1)}+3^{(n+2)}$;
b) 13 jest dzielnikiem $1+3^{(3n+1)}+9^{(3n+1)}$.

Zad.9 Udowodnij, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555}+5555^{2222}$.

Zad.10 Jaka jest ostatnia cyfra liczby 7^{100}?

Zad.11 Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których 2^p+3^p jest podzielne przez 11.