WSTĘP DO TEORII LICZB – ZADANIA

Zestaw nr.7: Kongruencje kwadratowe; przedstawianie liczby naturalnej jako sumy kwadratów

Zad.1 Sprawdź czy następujące kongruencje kwadratowe mają rozwiązania:

a)	$x^2 \equiv 3 \mod 31$	e)	$x^2 \equiv 2 \mod 257$
b)	$x^2 \equiv 3 \mod 73$	f)	$x^2 \equiv 219 \mod 419$
c)	$x^2 \equiv 5 \mod 73$	g)	$2x^2 + 5x - 9 \equiv 0 \mod 101$
d)	$x^2 \equiv 7 \mod 97$	h)	$3x^2 + 6x + 5 \equiv 0 \mod 89$

Zad.2 Udowodnij, że jeśli liczba $n \equiv 3 \mod 9$ lub $n \equiv 6 \mod 9$ to nie da się jej przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Zad.3 Niech $p \in \mathbb{P}\backslash\{2\}$. Udowodnij, że

(a) $$p \mid x^2 - 2 \Rightarrow p \equiv 1 \mod 8 \quad \text{lub} \quad p \equiv 7 \mod 8.$$

(b) $$p \mid x^2 + 2 \Rightarrow p \equiv 1 \mod 8 \quad \text{lub} \quad p \equiv 3 \mod 8.$$

(c) $$p \mid x^4 + 1 \Rightarrow p \equiv 1 \mod 4.$$

Zad.4 Korzystając z poprzedniego zadania, wykaż że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$.

Zad.5 Wykaż, że liczbę naturalną n można przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych na tyle samo sposobów co liczbę $2n$.

Zad.6 Udowodnij, że liczba naturalna n ma postać $n = a^2 - b^2$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $n \not\equiv 2 \mod 4$.

Zad.7 Udowodnij, że jeżeli $n = 4^m(8k + 7)$, to liczby n nie można przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych.

Zad.8 Twierdzenie Waringa Udowodnij, że

$$g(k) \geqslant \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor + 2^k - 2.$$

Wskazówka: pełny tekst znajdziesz – tutaj