PODSTAWY TEORII LICZB – ZADANIA

Zestaw nr.3 – Funkcje arytmetyczne

Zad.1 (a) Znajdź wszystkie $n \in \mathbb{N}$, które mają 10 dzielników

(b) i znajdź najmniejszą z tych liczb.

Zad.2 (a) Udowodnij, że jeżeli $M_n = 2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $N = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ jest liczbą doskonałą, a także

(b) Wykaż, że ostatnią cyfrą liczby doskonałej może być tylko 6 albo 8.

Zad.3 Oblicz wartość sumy

$$\left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt{n^2 - 1} \right\rfloor.$$

Zad.4 Udowodnij tożsamość Hermite'a

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor, \qquad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Zad.5 Liczba dzielników,$\tau(n)$.

Funkcja liczby dzielników, $\tau(n)$ (lub $d(n)$) występuje jako współczynniki w pewnych szeregach potęgowych, pełniących rolę *funkcji tworzących* dla $\tau(n)$.

(a) Na przykład szereg Lamberta, to — $|x| < 1$ —

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1} \tau(n) \cdot x^n.$$

Udowodnij ten wzór.

(b)Funkcja dzeta Riemanna określona jest jako

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \qquad s > 1.$$

Wykaż, że zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = [\zeta(s)]^2, \qquad \text{dla} \quad s > 1.$$

Zad.6 Suma dzielników, $\sigma(n)$.

(a) Wykaż, że suma sum dzielników całkowitych wszystkich liczb mniejszych od lub równych pewnej liczbie rzeczywistej i dodatnej x, funkcja

$$S(x) = \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma\left(\lfloor x \rfloor\right) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

(b) Udowodnij, że funkcją tworzącą dla $\sigma(n)$ jest szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1} \sigma(n) \cdot x^n.$$

wskazówka: rozważ podwójną sumę

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} kx^{kl}.$$

(c) Stosując tę samą technikę jak w problemie poprzednim wykaż:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1), \qquad \text{dla} \quad s > 2.$$

Zad.7 Funkcja Eulera, $\phi(n)$.

(a) Wykaż, że suma

$$\sum_{d|n}\phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\phi\left(d\right) = n.$$

(b) Wykaż

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Zad.8 Wykaż, że dla każdego $n \geqslant 2$

$$\frac{n^2}{2} < \phi(n)\cdot\sigma(n) < n^2.$$

wskazówka: przydatny będzie wzór, tzw. *iloczyn Eulera*:

$$\zeta(s) = \prod\frac{1}{1-p^{-s}}; \qquad s = 2.$$