PODSTAWY TEORII LICZB – ZADANIA

Zestaw nr.2: Podzielność liczb; Liczby pierwsze

Zad.0 Podaj treść *zasadniczego twierdzenia arytmetyki* i udowodnij to twierdzenie.

Zad.1 Udowodnij, że nie istnieją takie k i n; $k,\ n \in \mathbb{N}$, dla których liczba
$\pm\frac{1}{k} \pm \frac{1}{k+1} \pm \ldots \pm \frac{1}{k+n}$
jest całkowita.

wskazówka: wykaż np., że nie mogą istnieć dwa różne mianowniki $k+w$, które miałyby oba dzielnik 2^α, gdzie α ma wartość maksymalną dla całego zbioru ułamków.

Zad.2 Wykaż, że

$$\limsup(p_{n+1} - p_n) = \infty,$$

gdzie p_n i p_{n+1} to kolejne liczby pierwsze.

wskazówka: rozpatrz ciąg $(n+1)! + k, \quad k = 1, 2, \ldots, ?$

Zad.3 Wykaż, że wykładnik α, z którym liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $m!$ jest równy

$$\left\lfloor \frac{m}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

wsk. Knuth, matematyka konkretna.

Zad.4 Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathbb{P}}} p < 4^x.$$

wsk. indukcja.

Zad.5 Udowodnij, że dla każdego n i nieparzystego k

$$1 + 2 + \ldots + n \mid 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

wsk. indukcja.

Zad.6 Udowodnij, że dla wszystkich $n > 0$ zachodzi $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

W oparciu o ten wynik udowodnij, że dla wszystkich $n > 0$ zachodzi $(2^n - 1)^2 \mid 2^{(2^n-1)n} - 1$.

wsk. wzór dwumianowy

Zad.7 Wykaż, że równanie

$$p^n + q^n = r^n, \qquad n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

nie ma rozwiązań w liczbach pierwszych.

Zad.8 a)Udowodnij, że każda liczba naturalna większa od 6, jest sumą dwóch liczb naturalnych m i n, gdzie $m, n > 1$ oraz $m \perp n$.
b)Korzystając z a) sprawdź, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi

$$p_{n+1} + p_{n+2} \leqslant p_1 p_2 \ldots p_n.$$