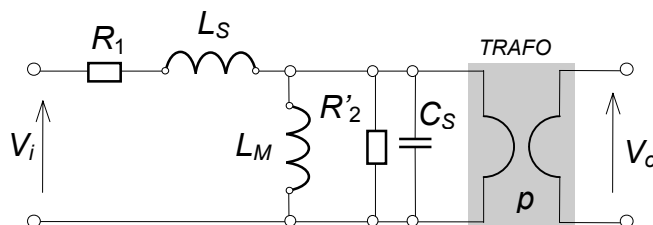


## Dodatek E

### Transformator impulsowy – Uproszczona analiza

Za podstawę uproszczonej analizy transformatora impulsowego przyjmijmy jego schemat zastępczy w wersji zredukowanej SLS, w której parametry strony wtórnej zostały przeniesione na stronę pierwotną. Przedstawiono go na rysunku E1.



**Rys. E1.** Schemat zastępczy transformatora impulsowego.

Przyjęto na nim następujące oznaczenia:

$R_1$  – sumaryczna oporność uzwojenia pierwotnego i generatora sygnału wejściowego

$L_S$  – indukcyjność rozproszenia strony pierwotnej i (przeniesiona) strony wtórnej

$L_M$  – indukcyjność główna (magnesyjną)

$C_S$  – wypadkowa (zastępcza) pojemność uzwojeń

$R_2'$  – przeniesiona sumaryczna oporność uzwojenia wtórnego i obciążenia transformatora

$p$  – przekładnia transformatora

$V_1$  – napięcie wejściowe

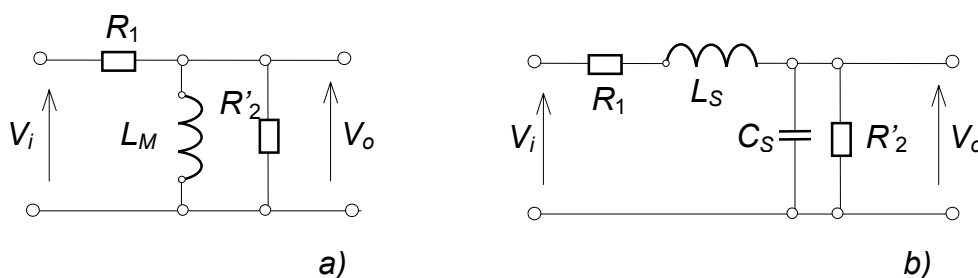
$V_2$  – napięcie wyjściowe

Transmitancję tego układu opisuje równanie

$$F(p) = \frac{\left( pC_S + \frac{1}{pL_M} + \frac{1}{R_2'} \right)^{-1}}{\left( pC_S + \frac{1}{pL_M} + \frac{1}{R_2'} \right)^{-1} + (R_1 + pL_S)} \quad (\text{E-1})$$

Umożliwia ono wyznaczenie podstawowych charakterystyk transformatora, a mianowicie *charakterystykę akokową*, *charakterystykę amplitudową* i *charakterystykę fazową*.

Znaczne ułatwienie obliczeń analitycznych uzyskujemy w przypadku odniesienia ich do wyróżnionych, dwóch zakresów częstotliwościowych: zakresu niskich i zakresu wysokich częstotliwości. Zakresom tym odpowiadają przedstawione na rysunku E2 uproszczone schematy zastępcze



**Rys. E2.** Uprozczone schematy zastępcze dla zakresu niskich (a) i wysokich (b) częstotliwości.

Ich transmitancje wynoszą

$$F(p)_{NCz} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{p}{p + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}}, \quad (E-2)$$

$$F(p)_{wCz} = \frac{R_2}{p^2 L_S C R_2 + p(L_S + C R_1 R_2) + (R_1 + R_2)}. \quad (E-3)$$

Na miarę przybliżenia są one odpowiedzialne za ukształtowanie odpowiedzi na wolno- i szybkozmenną część wymuszającego impulsu wejściowego. Dla hipotetycznego „wąskiego” impulsu prostokątnego zasadnicze znaczenie ma przenoszenie obu krawędzi impulsu, narastającej i opadającej, których widma mieszczą się w zakresie częstotliwości wysokich. Główny problem analizy sygnałowej transformatora sprowadza się zatem do wyznaczenia jego charakterystyki skokowej. Dokonamy tego na gruncie uproszczonej postaci transmitancji (E-3).

Przypomnijmy, że operatorowa funkcja jednostkowej odpowiedzi skokowej  $R(p)$  związana jest z transmitancją  $F(p)$  prostym związkiem:

$$R(p) = \frac{1}{p} F(p) \quad (E-4)$$

Podstawienie (E-3) do (E-4) i wykonanie prostych przekształceń daje w wyniku

$$R(p) = \frac{R_2'}{p(p + p_1)(p + p_2)} \quad (E-5)$$

gdzie  $p_1$  i  $p_2$  są biegunami funkcji operatorowej (E-3). Wynoszą one odpowiednio

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R_1}{2L_S} + \frac{1}{2R_2' C_S}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R_1}{2L_S} + \frac{1}{2R_2' C_S}\right)^2 - \left(\frac{R_1 + R_2'}{R_2'}\right) \frac{1}{L_S C_S}} \quad (E-6)$$

Zależnie od wzajemnej relacji wartości parametrów transformatora wyrażenie podpierwiastkowe może przybierać wartość dodatnią, zerową względnie ujemną. W konsekwencji bieguny  $p_1$  i  $p_2$  stanowiąc będą odpowiednio, parę rzeczywistą, rzeczywisty biegun podwójny, względnie sprzężoną parę zespoloną. Przekształćmy równanie (E-6) wyrażając je w terminach charakteryzujących własności transformatora.

$$a = \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} \quad - \text{współczynnik attenuacji} \quad (E-7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{L_S C_S} a \quad - \text{okres drgań własnych} \quad (E-8)$$

$$k = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{R_1}{L_S} + \frac{1}{R_2' C_S}\right) \quad - \text{współczynnik tłumienia} \quad (E-9)$$

Przyjmuje ono wówczas prostszą postać, bardziej dogodną w dalszej analizie

$$p_{1,2} = \frac{2\pi}{T} \left(-k \pm j\sqrt{1-k^2}\right) \quad (E-10)$$

Komentując uzyskany rezultat należy zauważyć, że dla  $k = 0$  bieguny  $p_{1,2}$  są czysto urojone. Oznacza to, że odpowiedź na wymuszenie skokowe stanowi wówczas nietłumiony przebieg sinusoidalny o okresie  $T$  opisanym zależnością (E-8). Z zależności (E-9) wynika natomiast iż dla dopełnienia warunku  $k = 0$  koniecznym jest aby rezystancja  $R_1 \rightarrow 0$  i równocześnie  $R_2' \rightarrow \infty$ . Dla tych warunków z kolei współczynnik atenuacji  $a \rightarrow 1$  wobec czego wyrażenie (E-8) sprowadza się do postaci  $T = 2\pi (L_S C_S)^{1/2}$  opisującej okres drgań swobodnych obwodu  $L_S C_S$ .

Równanie (E-10) ukazuje dominujący wpływ tłumienia na charakter biegunów, a tym samym na kształt odpowiedzi skokowej transformatora. W zależności od wartości współczynnika tłumienia  $k$  tłumienie nazywamy:

- podkrytycznym gdy  $k < 1$
- krytycznym gdy  $k = 1$
- nadkrytycznym gdy  $k > 1$

Odpowiedź skokowa transformatora w dziedzinie czasu dla wyróżnionych przypadków przybiera odpowiednio postać<sup>1</sup>.

dla  $k < 1$

$$V_0(t) = a \left\{ 1 - \left[ \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \sin\left(2\pi\sqrt{1-k^2}\frac{t}{T}\right) + \cos\left(2\pi\sqrt{1-k^2}\frac{t}{T}\right) \right] \exp\left(-\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\} \quad (\text{E-11})$$

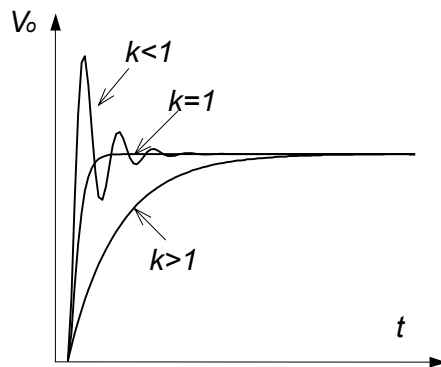
dla  $k = 1$

$$V_0(t) = a \left[ 1 - \left( 1 + 2\pi\frac{t}{T} \right) \exp\left(-2\pi\frac{t}{T}\right) \right] \quad (\text{E-12})$$

dla  $k > 1$

$$V_0(t) = a \left[ 1 - \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \exp\left(-\frac{\pi t}{kT}\right) + \frac{1}{4k^2 - 1} \exp\left(-\frac{4\pi kt}{T}\right) \right] \quad (\text{E-13})$$

Przebiegi te ilustruje poglądowo rysunek E3.



**Rys. E3.** Kształty odpowiedzi transformatora na czoło impulsu prostokątnego przy różnych tłumieniach.

Rzut oka na powyższy rysunek, a zwłaszcza dokładna inspekcja formuł (E-11÷E-13), pozwala dostrzec szczególną zaletę tłumienia krytycznego. Spełnienie warunku  $k = 1$  profituje, obok pożądanej aperiodyczności odpowiedzi, również najkrótszym w tej klasie odpowiedzi czasem narastania impulsu wyjściowego. Obliczony według kryterium 10 i 90 % wynosi on w tym przypadku

$$t_n = 3,35 \sqrt{L_S C_S a} \quad (\text{E-14})$$

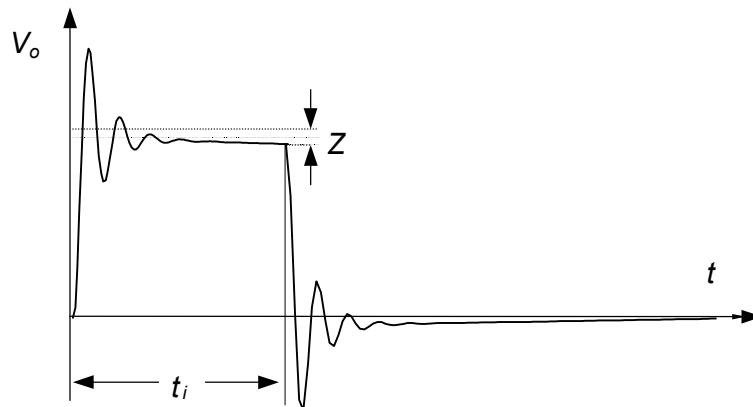
Przenoszenie płaskiego grzbietu impulsu wejściowego opiszemy w oparciu o niskoczęstotliwościowy schemat zastępczy z rysunku E2 a i jego transmitancję (E-2). Prosty rachunek daje w tym przypadku

$$V_{oi} = a \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cong a \left[1 - \frac{t}{\tau} + \dots\right] \quad (\text{E-15}) \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{L_M (R_1 + R_2')}{R_1 R_2'} \quad (\text{E-16})$$

Według tej zależności w interwale płaskiej części wymuszającego impulsu wejściowego następuje spadek chwilowych wartości odpowiedzi. W chwili  $t = t_i$  (tj. w momencie zakończenia impulsu wejściowego) spadek ten osiąga wartość  $Z \cong a (t_i/\tau)$ , nazywaną w terminologii techniki impulsowej mianem „zwisu”.

Skokowy zanik impulsu wejściowego odpowiada sytuacji, w której w niezerowych warunkach początkowych układu zastępczego podany zostaje nań sygnał skokowy odwrotnej polarności. Warunki „początkowe” tego fragmentu sygnału związane są obecnie ze współrzędną czasową  $t = t_i$ .

Za przenoszenie krawędzi opadającej impulsu odpowiedzialne są dwa równoległe przebiegające procesy; proces rozpraszania energii zmagazynowanej w elementach konserwatywnych obwodu ( $L_M, C_S$ ), oraz pobudzenie obwodu powrotnym skokiem napięcia. Drugi z wymienionych skutkuje identycznym rezultatem jaki miał miejsce przy narastaniu impulsu, pierwszy natomiast decyduje o charakterze i szybkości zaniku ujemnego przerzutu. Ten obszar impulsu wyjściowego z pomiarowego punktu widzenia jest bezużyteczny nie niesie bowiem informacji użytecznej. Z tego też powodu pominiemy jego analizę, ograniczając się jedynie do zaprezentowania, dla przykładu, graficznego odwzorowania kształtu odpowiedzi transformatora na wymuszenie impulsem prostokątnym w warunkach bardzo słabego tłumienia.



**Rys. E4.** Poglądowy przykład przebiegu odpowiedzi transformatora na impuls prostokątny

Podstawową funkcją każdego transformatora jest transfer energii ze źródła sygnału do odbiornika, który dokonuje się za pośrednictwem (uwidocznionych na schematach zastępczych) jego elementów konserwatywnych ( $L_M, L_S, C_S$ ). Wartości tych elementów decydują zarówno o tłumieniu przenoszonego sygnału jak również o poziomie przenoszonej mocy.

Warunek minimalizacji tłumienia sygnału sprowadza się do żądania, aby energia pola magnetycznego indukcyjności rozproszenia  $W_{L_s}$  była równa energii pola elektrycznego w pojemności rozproszonej  $W_{C_s}$ . Energie te opisane są odpowiednio przez formuły:

$$W_{L_s} = \frac{1}{2} L_s I_{C_s}^2 \quad (\text{E-17})$$

oraz

$$W_{C_s} = \frac{1}{2} C_s V_{L_s}^2 \quad (\text{E-18})$$

Wartości prądu  $I_{L_s}$  w indukcyjności  $L_s$  oraz napięcia  $V_{C_s}$  w pojemności  $C_s$  wyznaczymy na podstawie schematów zastępczych, zakładając na wejściu jednostkowe wymuszenie skokowe [ $V_i(t) = 1 H(t)$ ]. Dla stanu ustalonego otrzymujemy

$$V_{C_s} = 1 \cdot \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} \quad (\text{E-19})$$

$$I_{L_s} = \frac{1}{R_1 + R_2'} \quad (\text{E-20})$$

Przyrównanie wyrażeń (E-17) i (E-18) po podstawieniu do nich zależności (E-19) i (E-20) daje

$$\frac{1}{2} L_s \left( \frac{1}{R_1 + R_2'} \right)^2 = \frac{1}{2} C_s \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2'} \right)^2 \quad (\text{E-21})$$

skąd wynika **pierwszy warunek kryterialny**

$$R_2' = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}} \quad \text{względnie} \quad \boxed{R_2 = p^2 \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}} \quad (\text{E-22})$$

(W tekście rozdziału 3.6 rezystancję obciążenia  $R_2$  reprezentowała impedancja falowa  $Z_0$  linii transmisyjnej)

Optymalny przekaz energii ma miejsce w przypadku pełnego zbilansowania energii tj. gdy suma energii ( $W_{L_s} + W_{C_s}$ ) jest równa energii  $W_M$  pola magnetycznego indukcyjności głównej (magnesującej). Przy przenoszeniu bardzo krótkich impulsów można założyć, że prąd  $I_{L_M}$  w indukcyjności głównej jest liniową funkcją czasu. W konsekwencję równanie Faradaya opisujące SEM samoindukcji daje się wyrazić w postaci przyrostowej

$$V_{L_M} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L_M \frac{I_{L_M}}{t_i} \quad (\text{E-23})$$

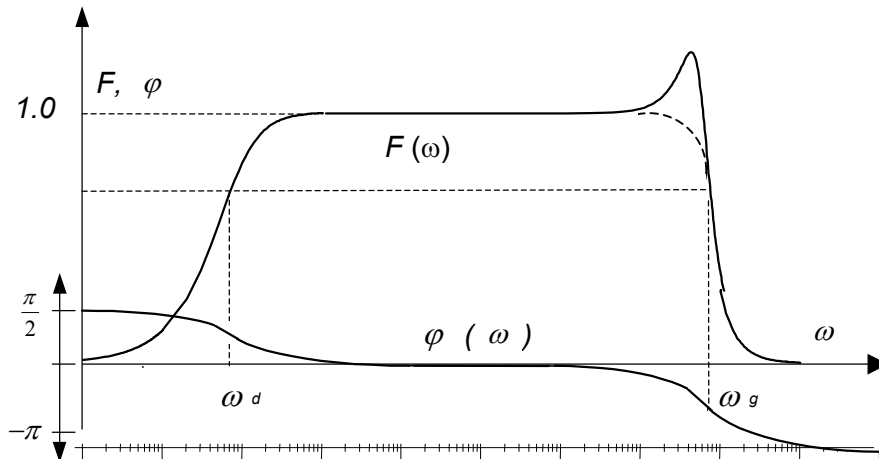
skąd

$$I_{L_M}^2 = \left( \frac{V_{L_M}}{L_M} \right)^2 t_i \quad (\text{E-24})$$

Uwzględnienie relacji (E-25) w równaniu (E-23) daje w rezultacie wyrażenie stanowiące treść **drugiego warunku kryterialnego** [formuła (30) w rozdz. 3.6], a mianowicie

$$\sqrt{2L_M C_S} = t_i \quad (\text{E-26})$$

Dla możliwie wiernego zachowania kształtu przenoszonego impulsu niezbędne jest zminimalizowanie zniekształceń liniowych transformatora. Są one uwarunkowane przebiegiem jego charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej. Na rysunku E5 przedstawiono dla przykładu typowe przebiegi tych charakterystyk niedopasowanego, słabo obciążonego transformatora impulsowego.



**Rys. E5.** Amplitudowa  $[F(\omega)]$  i fazowa  $[\varphi(\omega)]$  charakterystyki transformatora o małym tłumieniu.

Przy przenoszeniu bardzo krótkich impulsów o dużych stromościach czoła i krawędzi opadającej, pożądanym jest maksymalnie płaski przebieg obu charakterystyk częstotliwościowych, zwłaszcza w obszarze wysokich częstotliwości. W stosunkowo prosty sposób, przez wprowadzenie tłumienia krytycznego, udaje się zlikwidować *pik drugiego rezonansu* na charakterystyce amplitudowej. Na rysunku E5 zaznaczono to linią przerywaną. Zminimalizowanie zniekształceń fazowych możliwe jest natomiast poprzez przesunięcie tej częstotliwości rezonansowej do zakresu wyższych wartości. W kontekście tak ogólnie postawionego wymagania sformułowany jest właśnie **trzeci warunek kryterialny**, według którego

$$2\pi\sqrt{L_S C_S} \ll t_i \quad (\text{E-27})$$

Materiały źródłowe.

1. Millman J., H. Taub.: Pulse and digital circuits. McGraw-Hill Company, Inc., New York, Toronto, London 1956
2. Praca zbiorowa MIT: Magnetic Circuit and Transformers. John Wiley @ Sons, Inc., New York, Chapman @ Hall Ltd., London
3. Istvanffy E.: Materiały magnetyczne i ich zastosowanie. PWN, Warszawa 1956.