# Dodatek A
**(Dowód twierdzenia Ramo-Shockley'a)**

Ogólny dowód twierdzenia **Ramo-Shockley'a**, oparty na zmodyfikowanej postraci tożsamości **Greena,** podali **Hunsuk, Min, Tang** i **Park.** Zgodnie z ich koncepcją rozważmy system **M** dowolnie ukształtowanych elektrod mieszczących się w niejednorodnym ośrodku o znanym rozkładzie przestrzennym stałej dielektrycznej $\varepsilon(\mathbf{r})$. Potencjały tych elektrod $\Phi_{ak}(t)$ (dla k=1,....M) wymuszane są przez zewnętrzne źródła polaryzacji, przy czym dopuszczamy ich dowolną, funkcjonalnie określoną zależność od czasu.

Załóżmy, że w zadanym ośrodku znajduje się **N** nośników ładunku (ruchomych i nieruchomych) tworzących w nim ładunek przestrzenny o gęstości $\rho(\mathbf{r},t)$.

Niech $q_i$ oznacza ładunek elektryczny i-tego nośnika, zaś $\mathbf{r}_i(t)$ oraz $\mathbf{v}_i(t)$ odpowiednio chwilową wartość jego położenia i prędkości. Czasowo-przestrzenny rozkład gęstości ładunku przestrzennego zapiszemy więc w postaci

$$\rho(\mathbf{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)) \qquad \text{(A-1)}$$

W oparciu o zasadę niezależności działań, zarówno pole elektryczne jak i potencjały pola rozłożymy na dwie składowe: jedną pochodzącą od ładunku przestrzennego i drugą od zewnętrznej polaryzacji elektrod. Niech $\Phi_\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ oznacza chwilową wartość potencjału w punkcie $\mathbf{r}$ wywołanego ładunkiem przestrzennym przy uziemionych wszystkich elektrodach systemu, natomiast $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{r},t)$ analogiczną wartość potencjału pola spowodowaną istnieniem skończonych wartości napięć polaryzujących elektrody w warunkach usunięcia z obszaru systemu wszystkich nośników ładunku. Wypadkowy potencjał $\Phi(\mathbf{r},t)$ wyrazi się zatem w formie

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Phi_\rho(\mathbf{r},t) + \Phi_a(\mathbf{r},t) \qquad \text{(A-2)}$$

Wyróżnione stany systemu w przybliżeniu elektrostatycznym można opisać odpowiednio równaniem **Poissona** i **Laplace**'a.

W szczególności dla $\Phi_{\mathbf{ak}} = 0$ oraz $\rho(\mathbf{r},t)\neq 0$

$$-\,\mathrm{div}[\varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_\rho(\mathbf{r},t)] = \rho(\mathbf{r},t) \qquad \text{(A-3)}$$

natomiast w przypadku alternatywnym gdy $\rho(\underline{r},t) = 0$ oraz $\Phi_{ak}(\underline{r},t)\neq 0$

$$-\,\mathrm{div}[\varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_a(\mathbf{r},t) = 0 \qquad \text{(A-4)}$$

Zależności powyższe wykorzystamy w zmodyfikowanym przez Hunsuka i i. twierdzeniu Greena dla medium niejednorodnego. W ogólnym zapisie przyjmuje ono postać:

$$\int_V \{ \Phi_a(\mathbf{r},t)\ \mathrm{div}\ [\varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_\rho(\mathbf{r},t)] - \Phi_\rho(\mathbf{r},t)\ \mathrm{div}\ [\varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_a(\mathbf{r},t)]\ \}\ dV =$$

$$= \int_S [\ \Phi_a(\mathbf{r}_s)\ \varepsilon(\mathbf{r}_s)\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_\rho(\mathbf{r}_s,t) - \Phi_\rho(\mathbf{r}_s)\ \varepsilon(\mathbf{r}_s)\varepsilon_o\ \mathrm{grad}\ \Phi_a(\mathbf{r}_s,t)\ ] \bullet d\mathbf{S} \qquad \text{(A-5)}$$

gdzie V oznacza całkowitą objętość systemu z wyłączeniem objętości własnej **M** elektrod, **S** stanowi powierzchnię **M** elektrod, zaś $\mathbf{r}_s$ jest wektorem położenia na powierzchni elektrod.

Z podstawienia równań (A-3) i (A-4) do (A-5) otrzymujemy.

$$- \int_V \Phi_a(\mathbf{r},t)\,\rho(\mathbf{r},t)\,dV = \int_S \Phi_a(\mathbf{r}_s)\,\varepsilon(\mathbf{r}_s)\varepsilon_o\,\mathrm{grad}\,\Phi_\rho(\mathbf{r}_s,t) \bullet d\mathbf{S} \qquad \text{(A-6)}$$

Kolejne podstawienia za $\rho(\mathbf{r},t)$ wyrażenia (A-1) prowadzi do związku (A-7)

$$- \sum_{i=1}^{N} q_i\,\Phi_a(\mathbf{r}_i,t) = \sum_{k=1}^{M} \Phi_{ak}(t)\,Q_{\rho k}(t) \qquad \text{(A-7)}$$

przy czym wielkość

$$Q_{\rho k}(t) = \int_{sk} \varepsilon(\mathbf{r}_s)\varepsilon_o \mathrm{grad}\,\Phi_\rho(\mathbf{r}_s,t) \bullet d\mathbf{S} \qquad \text{(A-8)}$$

reprezentuje ładunek wyindukowany na k-tej elektrodzie przez zadany rozkład nośników ładunku przestrzennego.

Wyraźmy dla wygody potencjał pola $\Phi_a(\mathbf{r},t)$ wywołany wyłącznie napięciem polaryzacji k-tej elektrody $\Phi_{ak}(t)$ w punkcie $\mathbf{r}$ rozważanego obszaru jako iloczyn *czynnika skalującego* $\Phi_{ak}(t)$ oraz *funkcji rozkładu* $f_k(\mathbf{r})$

$$\Phi_{ak}(\mathbf{r},t) = \Phi_{ak}(t)\; f(\mathbf{r}) \qquad \text{(A-9)}$$

Funkcja rozkładu pola $f_k(\mathbf{r})$ stanowi w tym ujęciu niezależny od czasu i ładunku przestrzennego czysto geometryczny czynnik i oznacza potencjał elektryczny w punkcie $\underline{\mathbf{r}}$ wywołany jednostkowym potencjałem k-tej elektrody, gdy wszystkie pozostałe elektrody są uziemione, a ładunek przestrzenny usunięty z obszaru systemu.

W tym sposobie zapisu chwilowa wartość potencjału elektrycznego w punkcie $\underline{\mathbf{r}}$ uwarunkowana napięciami polaryzacji elektrod przyjmie postać:

$$\Phi_{ak}(\mathbf{r},t) = \sum_{k=1}^{M} \Phi_{ak}(t)\; f(\mathbf{r}) \qquad \text{(A-10)}$$

Podstawienie (A-10) do (A-7) daje

$$\sum_{k=1}^{N} \Phi_{ak}(t)\; [\, Q_{\rho k}(t) - \sum_{i=1}^{N} q_i\, f_k(\mathbf{r}_i)\,] = 0 \qquad \text{(A-11)}$$

gdzie $f_k(\mathbf{r}_i)$ jest wartością $f_k(\mathbf{r})$ na współrzędnej wektora położenia $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i(t)$.

Równanie (A-11) musi być spełnione dla dowolnych wartości potencjałów $\Phi_{ak}(t)$, wobec czego wyrażenie w nawiasie kwadratowym równania (A-11) (niezależne od potencjału elektrody) musi się zerować dla wszystkich k elektrod. Ładunek indukowany na k-tej elektrodzie będzie więc równy

$$Q_{\rho k}(t) = - \sum_{i=1}^{N} q_i\, f_k(\mathbf{r}_i) \qquad \text{(A-12)}$$

Jego pochodna względem czasu określa składową prądu indukowanego w k-tej elektrodzie przez poruszające się nośniki ładunku przestrzennego.

$$i_{\rho k}(t) = \frac{dQ}{dt} = - \sum_{i=1}^{N} q_i\, \mathbf{v}_i(t) \bullet \mathrm{grad}\, f_k(\mathbf{r}_i) \qquad \text{(A-13)}$$

Oprócz niej pojawia się druga składowa tego prądu pochodząca od ładunku $Q_{ak}(t)$ indukowanego na k-tej elektrodzie wskutek pojemnościowego sprzężenia z pozostałymi elektrodami o potencjałach zmieniających się w czasie, przy czym

$$Q_{ak}(t) = \int_{sk} \varepsilon(\mathbf{r}_s)\varepsilon_o \,\mathrm{grad}\, \Phi_{ak}(\mathbf{r}_s,t) \bullet d\mathbf{S} \qquad \text{(A-14)}$$

Przyjęcie–zgodnie z pierwotnym założeniem **Ramo** – stałości napięć polaryzujących elektrody sprowadza tę składową do **zera**. Całkowity prąd indukowany w k-tej elektrodzie opisany jest wówczas równaniem (A-13).

Zauważmy, że gradient funkcji rozkładu potencjału reprezentuje w istocie funkcję rozkładu natężenia pola elektrycznego $\Psi_k(\mathbf{r})$ generowanego wyłącznie przez **jednostkowe napięcie polaryzacji** k-tej elektrody, tj. przy uziemionych pozostałych elektrodach systemu i przy braku ładunku przestrzennego w objętości systemu. Równanie (A-13) można zatem przepisać w postaci:

$$i_k(t) = i_{\rho k}(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \,\mathbf{v}_i(t) \bullet \mathbf{\Psi_k}(\mathbf{r}) \qquad \text{(A-15)}$$

Formuła wyprowadzona przez **Ramo** dotyczyła systemu z jednym tylko ruchomym elektronem. Przypomnijmy jej oryginalne brzmienie.

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}\ \mathbf{v}\ \mathbf{E_v} \qquad \text{(A-16)}$$

gdzie: e - ładunek elektronu, v - prędkość elektronu, zaś $E_v$ - składowa pola (zdefiniowanego tak samo jak w przedstawionej wyżej analizie) na kierunek prędkości **v**.

W przypadku planarnego systemu dwuelektrodowego (jak np, płaska komora jonizacyjna lub planarny detektor półprzewodnikowy) o odległości elektrod **D** funkcja rozkładu pola ma wartość stałą (nie zależy od położenia) i wynosi

$$\mathbf{\Psi_k}(\underline{r}) = \frac{1}{D} \qquad \text{(A-17)}$$

wobec czego prąd indukowany w elektrodzie odbiorczej przez pojedynczy (punktowy) ładunek ruchomy $\mathbf{Q_o}$ poruszający się z prędkością dryfu **w(t)** jest opisany równaniem

$$\boldsymbol{i}(t) = \frac{Q_o\, w(t)}{D} \qquad \text{(A-18)}$$

Z tej właśnie postaci twierdzenia **Ramo** skorzystaliśmy przy wyznaczaniu kształtu **indukowanego** impulsu prądowego w detektorach półprzewodnikowych.

Materiały źródłowe.

1. Hunsuk Kim, H.S.Min, T.W.Tang, Y.J.Park.: „An extended proof of the Ramo-Shockley theorem". Solid-State-Electronics, vol.34, no.11, 1251, (1991)..
2. Simon Ramo.: „Currents induced by electron motion", Proc.IRE, vol.27, 584, (1939)
3. W.Shockley.: „Currents to conductors induced by a moving point charge", Journ. Appl. Phys., vol.9, 635, (1938).