

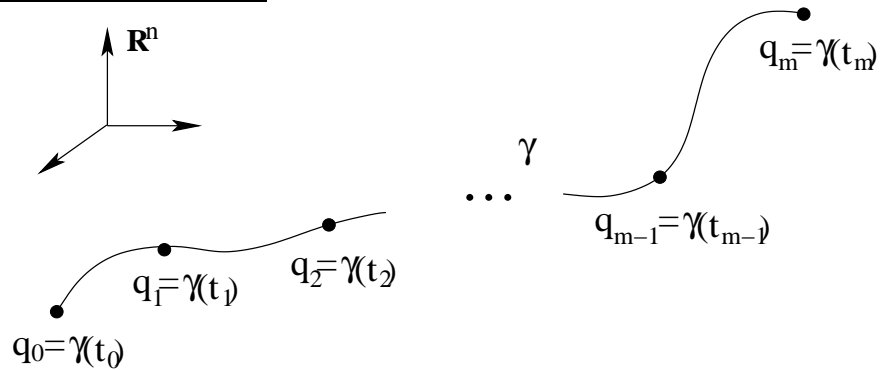
Modelowanie Krzywych poprzez Interpolację na Bazie Wielowymiarowych Danych Zredukowanych

Ryszard Kozera

School of Computer Science & Software Engineering
The University of Western Australia
Perth, Australia

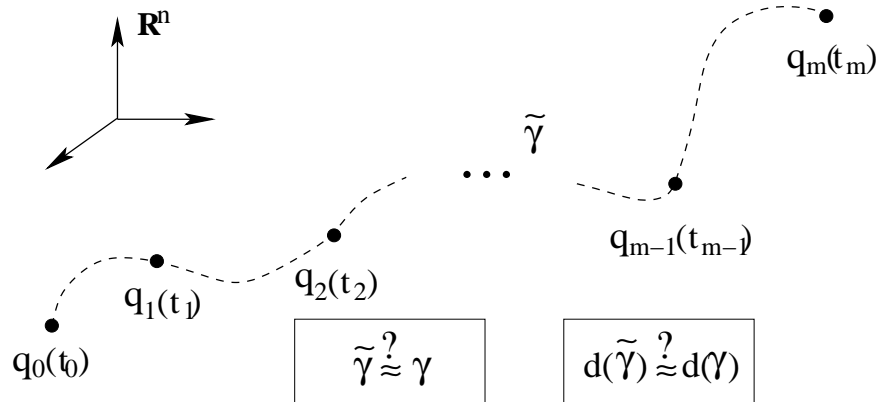
1. Temat Rozprawy

Krzywa gładka $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (t np. czas).



Rys. 1. Gładka krzywa γ^* .

Interpolacja parametryczna (IP): $\tilde{\gamma} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ z $\tilde{\gamma}(t_i) = \gamma(t_i)$ ($0 \leq i \leq m$)?



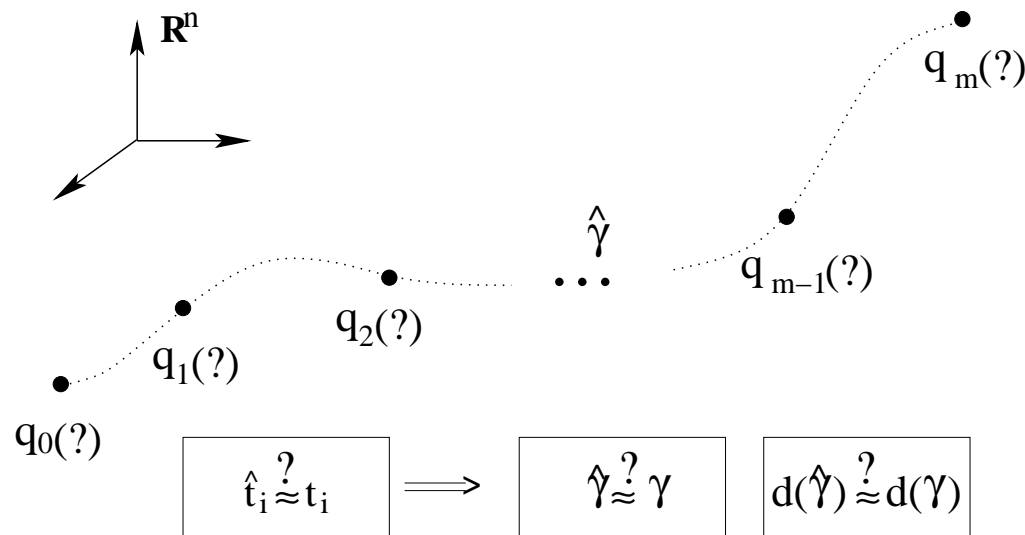
Rys. 2. Dane niezredukowane: pkty i węzły interpolacyjne $\{(q_i, t_i)\}_{i=0}^m \in (\mathbb{R}^{n+1})^{m+1}$.

*Długość krzywej: $d(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

IP:

- wybór interpolanta $\tilde{\gamma}$?
- czy krzywe $\tilde{\gamma} \approx \gamma$ i ich długości $d(\tilde{\gamma}) \approx d(\gamma)$ ($m \rightarrow \infty$)?
- asymptotyka zbieżności krzywej $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$ (i długości $d(\tilde{\gamma}) \rightarrow d(\gamma)$)?

Interpolacja nieparametryczna (IN): $\hat{\gamma} : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ z $\hat{\gamma}(\hat{t}_i) = \gamma(t_i)$ ($\{\hat{t}_i \approx t_i\}_{i=0}^m$)?



Rys. 3. Dane zredukowane - ciąg* pktów interpolacyjnych $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m \in (\mathbb{R}^n)^{m+1}$ (t_i nieznane).

*W przypadku danych niezredukowanych węzły interpolacyjne $\{t_i\}_{i=0}^m$ określają implicitnie porządek pktów $\{q_i\}_{i=0}^m$.

Przyk. 1: interpolacja Lagrange'a* (IL) (z $Q_2 \in \mathbb{R}^{3n}$ i $r = 2$ - wielomian kwadratowy) i dane:

a) niezredukowane (Q_2, \mathcal{T}) z $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2\} \Rightarrow \forall t \in [t_0, t_2]$ **IPL:**

$$\tilde{\gamma}_{\mathcal{T}}(t) = q_0 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} + q_1 \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} + q_2 \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}. \quad (1)$$

b) zredukowane Q_2 :

$$\mathcal{T} = ?$$

Dla $\mathcal{T} = ?$ wzór (1) =?! \Rightarrow wybór $\hat{\mathcal{T}} = ?$ i wtedy **INL:**

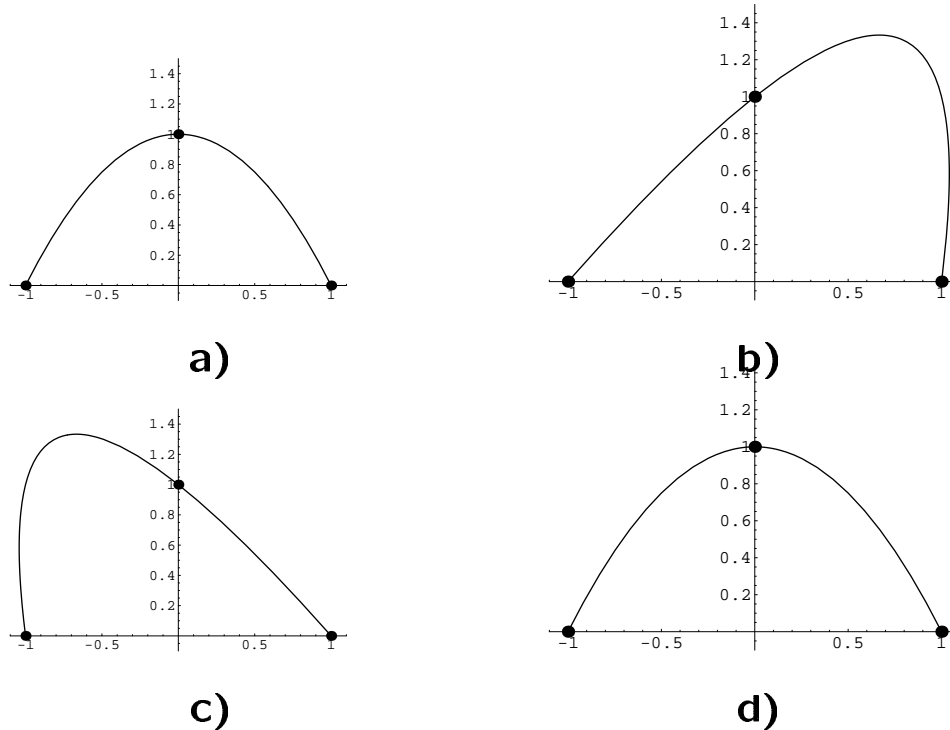
$$\hat{\mathcal{T}} = \{\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2\}$$

$\Rightarrow \forall \hat{t} \in [\hat{t}_0, \hat{t}_2]$

$$\hat{\gamma}_{\hat{\mathcal{T}}}(\hat{t}) = q_0 \frac{(\hat{t}-\hat{t}_1)(\hat{t}-\hat{t}_2)}{(\hat{t}_0-\hat{t}_1)(\hat{t}_0-\hat{t}_2)} + q_1 \frac{(\hat{t}-\hat{t}_0)(\hat{t}-\hat{t}_2)}{(\hat{t}_1-\hat{t}_0)(\hat{t}_1-\hat{t}_2)} + q_2 \frac{(\hat{t}-\hat{t}_0)(\hat{t}-\hat{t}_1)}{(\hat{t}_2-\hat{t}_0)(\hat{t}_2-\hat{t}_1)}. \quad (2)$$

*Dla funkcji wektorowej stosujemy wzory Lagrange'a na każdej współrzędnej.

Półokrąg $\gamma_p(t) = e^{i\pi(1-t)}$, $t \in [0, 1]$, $\mathcal{Q}_2 = \{\gamma_p(0), \gamma_p(0.5), \gamma_p(1)\}$, $r = 2$:



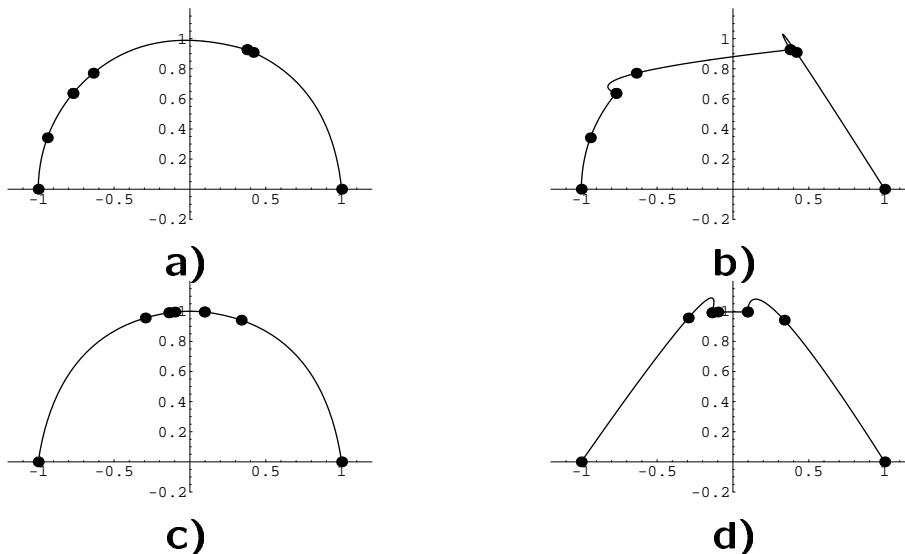
Rys. 4. **IPL** $\tilde{\gamma}_2$ a) $\mathcal{T} = \{0, 0.5, 1\}$. **INL** $\hat{\gamma}_2$: b) $\hat{\mathcal{T}} = \{0, 0.25, 1\}$, c) $\hat{\mathcal{T}} = \{0, 0.75, 1\}$, d) $\hat{\mathcal{T}}^* = \{0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$.

INL: różne $\hat{\mathcal{T}} = \{\hat{t}_i\}_{i=0}^2 \Rightarrow$ różne $\hat{\gamma}_2$ (porównaj b-d).

Nawet jeśli $\hat{\mathcal{T}} \neq \mathcal{T} \Rightarrow$ krzywe $\hat{\gamma}_2 \approx \tilde{\gamma}_2$ (porównaj a) z d)). □

*d) $\hat{t}_0 = 0$, $\hat{t}_1 = \|q_1 - q_0\|$ i $\hat{t}_2 = \hat{t}_1 + \|q_2 - q_1\|$ - skumulowana parametryzacja długością cięciwy (SPDC).

Przyk. 2: IL z $r = m$ w IP $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_r \neq \gamma \Rightarrow$ **sklejane wielomiany** - np. $\tilde{\gamma}_{L_m(r)}$
 lub $\hat{\gamma}_{L_m(r)}$ (sklejane wielomiany Lagrange'a stopnia r):



Rys. 5. IP versus IN ($r = 2$).

\tilde{E} (i \hat{E}) **błąd w oszacowaniu długości** γ_p i $\tilde{\gamma}_{L_6(2)}$ dla **IP** (i $\hat{\gamma}_{L_6(2)}$ dla **IN**):

a) **IP**: $t_i^{r_1} \in [0, 1]$ losowe z $Q_6^{r_1} \Rightarrow \tilde{E}_a = 0.010$.

b) **IN**: $Q_6^{r_1}$ z $\hat{t}_i = i \Rightarrow \hat{E}_b = 0.206 > \tilde{E}_a$.

c) **IP**: $t_i^{r_2} \in [0, 1]$ losowe z $Q_6^{r_2} \Rightarrow \tilde{E}_c = 0.020$.

d) **IN**: $Q_6^{r_2}$ z $\hat{t}_i = i \Rightarrow \hat{E}_d = 0.107 > \tilde{E}_c$.

Q_m **rzadkie** (w oszacowaniu γ_p i $d(\gamma_p)$) **IP lepsza niż IN ze ślepych wyborem $\hat{T} \approx T!$** *

□

*Też dla danych **gęstych** - **Przyk. 4**.

IN - tematyka rozprawy (13 publikacji w tym monografia):

- wybór $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m \approx \{t_i\}_{i=0}^m$ (próbki "nie* i równo"-mierne)
- konstrukcja różnych **IN** (wielomiany sklejane $\hat{\gamma}$)
- zbieżność i asymptotyka $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ i $d(\hat{\gamma}) \rightarrow d(\gamma)$
- czy (dla danej metody interpolacyjnej) asymptotyki zbieżności w **IN** i **IP** są identyczne[†]?
- ilustracje (dane gęste/rzadkie) + zastosowania
- wnioski i problemy otwarte

*Np. **SPDC**

†Jeśli tak: możliwa kompensacja straty informacji przy przejściu z danych niezredukowanych do danych zredukowanych.

2. Interpolacja Nieparametryczna - Definicje

Dla $\gamma \in C^1$ ($\dot{\gamma} \neq 0$) i $q_i = \gamma(t_i)$ z $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{\delta*}$ nieznanymi:

$$\boxed{\delta = \max_{1 \leq i \leq m} \{t_i - t_{i-1}\}} \quad \boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} \delta \rightarrow 0^+}, \quad \text{jaka} \quad (3)$$

- **schemat interpolacyjny** $\hat{\gamma}_m : [0, \hat{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$, **węzły** $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m$ i **reparametryzacja** $\psi_m : [0, T] \rightarrow [0, \hat{T}]$:

$$\boxed{\lim_{\delta \rightarrow 0^+} d(\hat{\gamma}_m) = d(\gamma)}, \quad \boxed{\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|\gamma - \hat{\gamma}_m \circ \psi_m\|_{\infty} = 0}. \quad (4)$$

- **asymptotyka zbieżności w (4)**

$$\boxed{d(\hat{\gamma}_m) - d(\gamma) = O(\delta^\alpha)},$$

$$\boxed{\hat{\gamma}_m \circ \psi_m - \gamma = O(\delta^\alpha)}.$$

Def. 1. Funkcje skalarne $f_{\delta > 0} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ **rzędu** $O(\delta^\alpha)$ ($f_\delta = O(\delta^\alpha)$):

$$\exists K > 0 \exists \delta_0 > 0 \quad \boxed{|f_\delta(t)| < K\delta^\alpha}, \quad \forall (\delta, t) \in (0, \delta_0) \times [0, T].$$

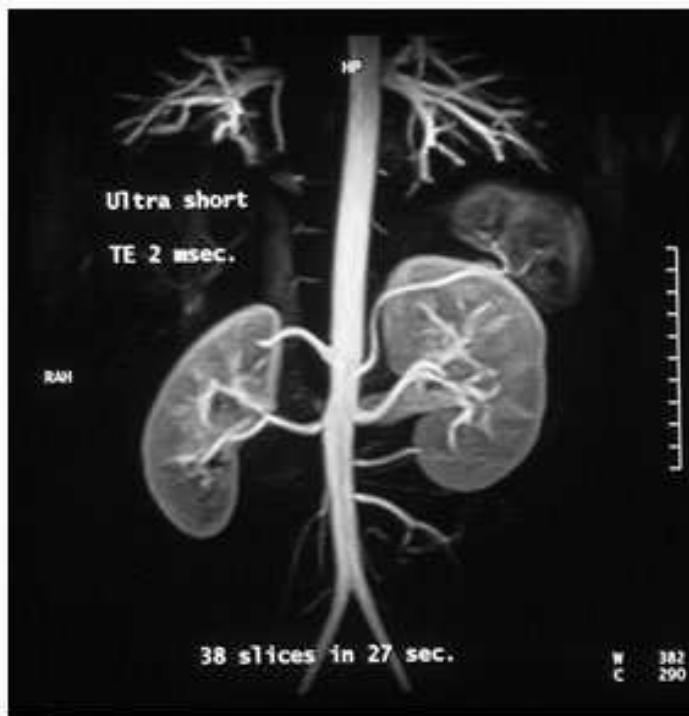
Funkcje **wektorowe** $F_{\delta > 0} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ są $F_\delta = O(\delta^\alpha)$ **gdy** $\|F_\delta\| = O(\delta^\alpha)$. \square

*(3) określa V^δ jako rodzinę **dopuszczalnych próbkowań**.

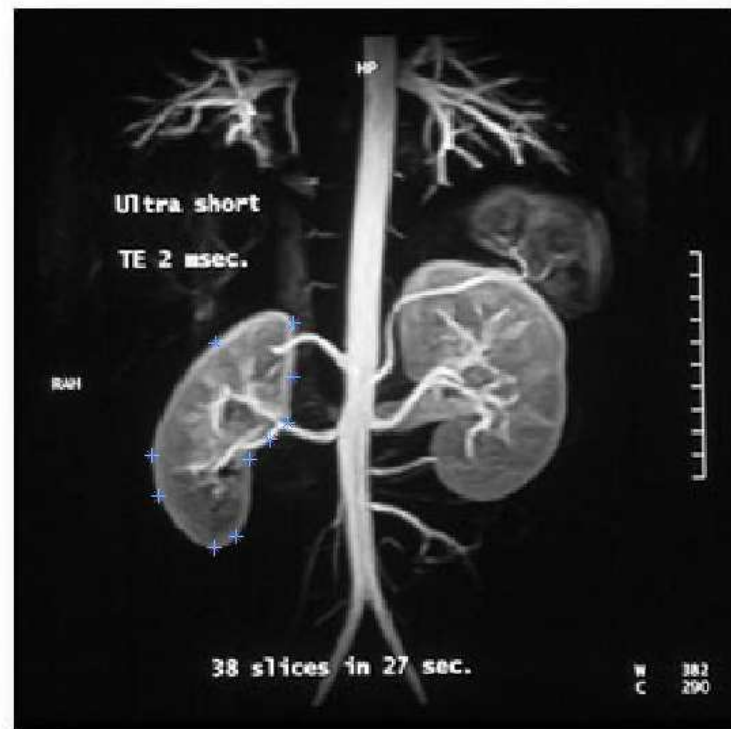
3. Motywacja Tematyki Rozprawy

- **IN: brak analizy zbieżności** $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ i $d(\hat{\gamma}) \rightarrow d(\gamma)$ (np. z **SPDC**) w ogólnym przypadku (tylko dla $n = 2, 3$ + krzywa wypukła + szczególne próbkowania)
- 2005 M.S. Floater “Chordal cubic spline interpolation is fourth order accurate”, IMA J. Num. Analysis pp. 1-9. - dla **SPDC dane na wejściu**: Q_m + pochodne $\dot{\gamma}(t_0)$ i $\dot{\gamma}(t_m)$
- **IN: zastosowania** w modelowaniu krzywych i procesów (zależnych od czasu)
 - medycyna (diagnostyka: np. jaskra, nowotwór, schizofrenia, epilepsja)
 - wizja komputerowa (np. segmentacja obrazu, morfizm)
 - grafika (np. modelowanie krzywych, trajektorii ruchu, animacja)
 - mechanika i fizyka (np. model. trajektorii w komorze Wilsona)

Przyk. 3:



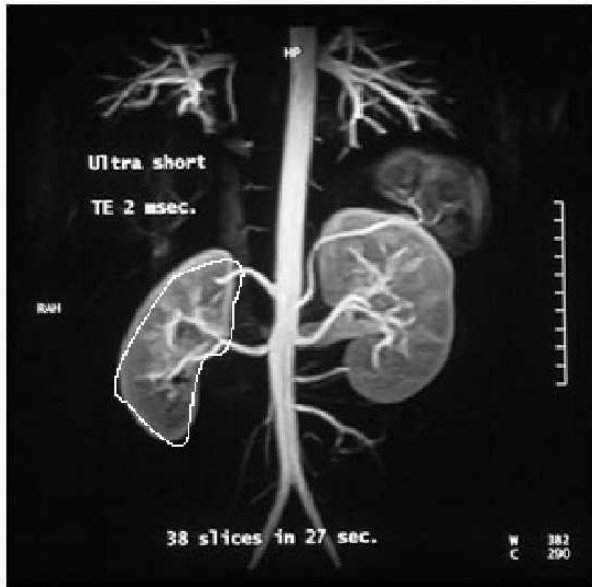
a)



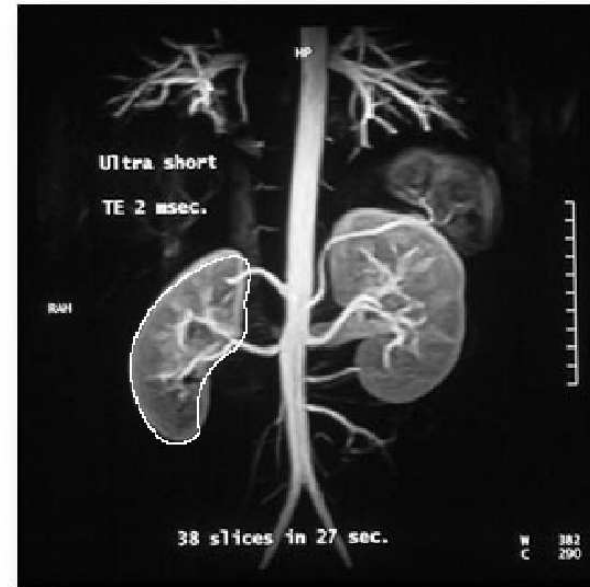
b)

Rys. 5. Zdjęcie nerki: a) pierwotne b) z ustalonymi pktami interpolacyjnymi.

Zadanie (diagnostyka): obwód i pole sekcji nerki (\Rightarrow objętość).



a)



b)

Rys. 6. IN przedziałowo-kwadratowa z $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^9$: a) równomierne b) SPDC.

a) Obwód nerki: $d(\hat{\gamma}_{L_9(2)}) = 287 \times \text{dł. piksela.}$

Powierzchnia sekcji nerki wydzielona pętlą $\hat{\gamma}_{L_9(2)}$: $3035 \times \text{powierzchni piksela.}$

b) Obwód nerki: $d(\hat{\gamma}_{L_9(2)}) = 317 \times \text{dł. piksela.}$

Powierzchnia sekcji nerki wydzielona pętlą $\hat{\gamma}_{L_9(2)}$: $3200 \times \text{powierzchni piksela.}$



4. Interpolacja Parametryczna

IP: dane niezredukowane (Q_m, \mathcal{T}) :

a) równomierne $\mathcal{T} = \{\frac{iT}{m}\}_{i=0}^m$:

Tw. 1. $\tilde{\gamma}_{L_m(r)}$ sklejane wielomiany Lagrange'a stopnia $r \Rightarrow$

$$d(\tilde{\gamma}_{L_m(r)}) - d(\gamma) = \begin{cases} O(\delta^{r+1}) & r \text{ nieparzyste,} \\ O(\delta^{r+2}) & r \text{ parzyste,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}_{L_m(r)}\|_{\infty} = O(\delta^{r+1}). \quad (6)$$

b) nierównomierne & $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{\delta}$:

Tw. 2. Zbieżność w (5) i (6) rzędu $O(\delta^{r+1})$. W (5) też $m\delta = O(1)$.

(5) i (6) - **ostre!**

IP $r = 2, 3 \Rightarrow$ zbieżność kubiczna (4-ego rzędu).

5. Główne Wyniki Rozprawy

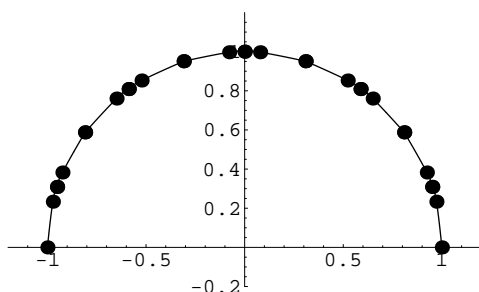
IN - wybór $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m \approx \{t_i\}_{i=0}^m$ i schematu interpolacyjnego $\hat{\gamma}$:

obliczeniowo szybki + $\hat{\gamma} \rightarrow \gamma$ i $d(\hat{\gamma}) \rightarrow d(\gamma)$ jej asymptotyka (+ dane rzadkie?)

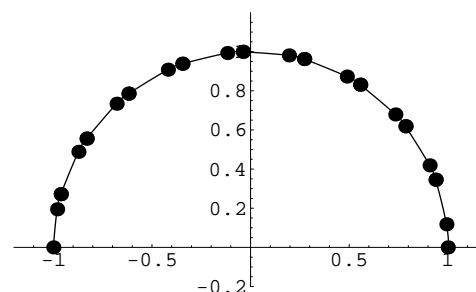
Przyk. 4: Ślepy wybór $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m \Rightarrow \{\text{zbieżność rozbieżność}\}$ (dualizm):

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{m} & i \text{ parzyste,} \\ \frac{i}{m} + \frac{1}{2m} & i \text{ nieparzyste \& } i = 4k + 1, \\ \frac{i}{m} - \frac{1}{2m} & i \text{ nieparzyste \& } i = 4k + 3, \end{cases} \quad (7)$$

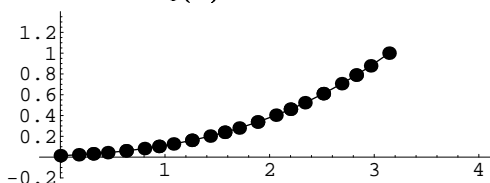
$$t_i = \frac{i}{m} + \frac{(-1)^{i+1}}{3m^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (\text{Rys. 6 : } \varepsilon = 0). \quad (8)$$



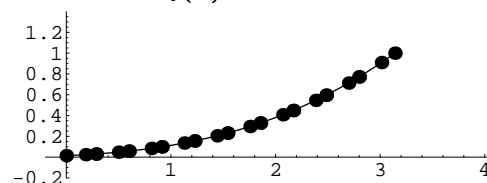
a) $\hat{\gamma}_{L_{20}(2)}$ dla γ_p i (7)



b) $\hat{\gamma}_{L_{20}(2)}$ dla γ_p i (8)



c) $\hat{\gamma}_{L_{20}(2)}$ dla γ_c i (7)



d) $\hat{\gamma}_{L_{20}(2)}$ dla γ_c i (8)

Rys. 6. INL: $\hat{\gamma}_{L_{20}(2)}$ dla $\gamma_p, \gamma_c(t) = (\pi t, (\frac{\pi t + 1}{\pi + 1})^3)$ ($t \in [0, 1]$) z $\hat{t}_i = i$.

INL \Rightarrow {zbieżność, rozbieżność} długości (choć $\hat{\gamma} \approx \gamma_p, \gamma_c$):

krzywe:	półokrąg γ_p		krzywa kubiczna γ_c	
próbkowania:	(7)	(8)	(7)	(8)
$\alpha_{d(\gamma)}$:	1.44 \diamond	rozb. \otimes	1.99 \square	rozb. \triangle
$ d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_{L_{200}(2)}) $:	3.45×10^{-4}	0.1288	6.36×10^{-8}	0.1364

Tab. 1. **INL:** estymacja $d(\gamma)$ z $d(\hat{\gamma}_{L_{200}(2)})$ i $\hat{t}_i = i$.

IPL \Rightarrow lepsza asymptotyka (por. $\diamond, \otimes, \square, \triangle$):

krzywe:	półokrąg γ_p		krzywa kubiczna γ_c	
próbkowania:	(7)	(8)	(7)	(8)
$\alpha_{d(\gamma)}$:	3.99 \diamond	4.02 \otimes	3.99 \square	2.99 \triangle

Tab. 2. **IPL:** estymacja $d(\gamma)$ z $d(\tilde{\gamma}_{L_{200}(2)})$ i t_i zadane.

WYNIK 1: **Tw. 3.** $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{\varepsilon \geq 0}$ ε -równomierne tzn. $t_i = \phi\left(\frac{iT}{m}\right) + O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}\right)$

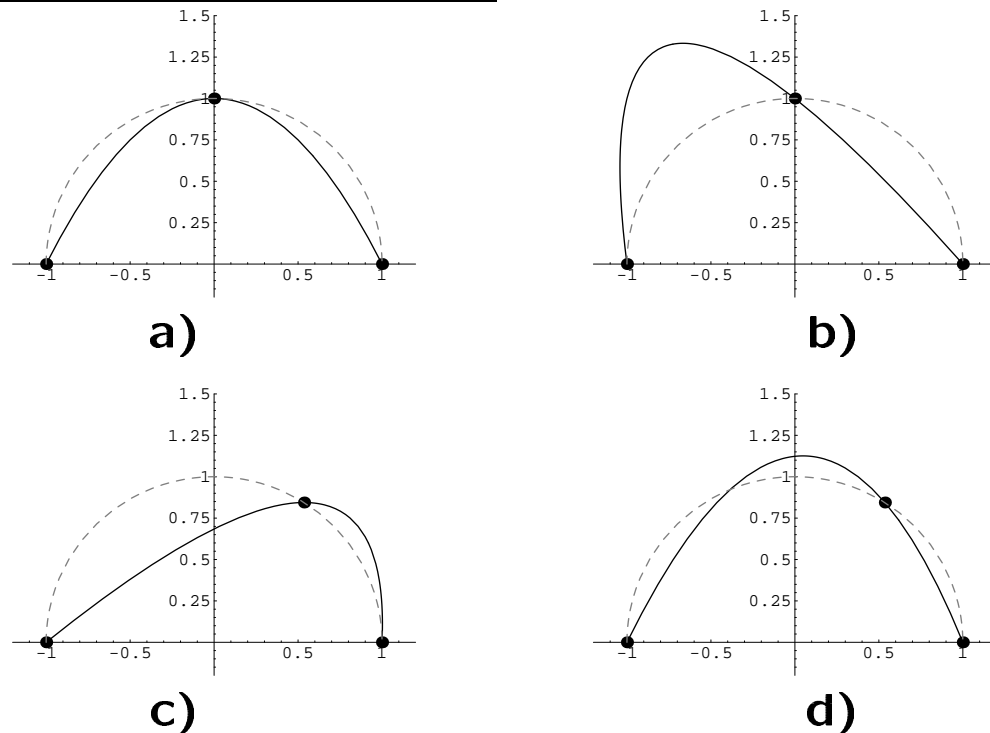
($\phi : [0, T] \rightarrow [0, T]$ i $\dot{\phi} > 0$) $\Rightarrow \hat{\gamma}_{L_m(2)}$ z $\hat{t}_i = i$ i $\varepsilon > 0$:

$$\hat{\gamma}_{L_m(2)} \circ \psi_m - \gamma = O(\delta^{\min\{3, 1+2\varepsilon\}}) \quad d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) - d(\gamma) = O(\delta^{\min\{4, 4\varepsilon\}}). \quad (9)$$

(9) też z $\varepsilon = 0$ jeśli $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol}$ mniej lub bardziej równomierne tzn.

$$\lambda\delta < t_{i+1} - t_i < \delta; \quad 0 \leq i \leq m - 1 \quad i \quad \lambda \in (0, 1).$$

Przyk. 6: Kryterium wyboru $\{t_i\}_{i=0}^m$:



Rys. 7. INL dla półokręgu γ_p z $\hat{\gamma}_{L_2(2)}$.

Błąd $\hat{E} = |\pi - d(\hat{\gamma}_{L_2(2)})|$ w oszacowaniu długości:

(a-b) $\hat{t}_i \in \hat{\mathcal{T}}_1 = \{0, 1, 2\}$ i $\hat{t}_i \in \hat{\mathcal{T}}_2 = \{0, 1.5, 2\}$ z Q_2^u :

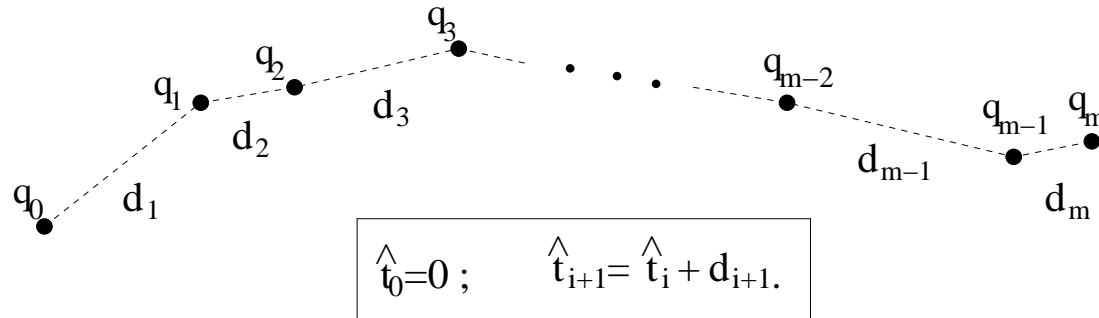
$$\hat{E}_a = 0.18 < \hat{E}_b = 0.55.$$

(c-d) $\hat{t}_i \in \hat{\mathcal{T}}_1$ (równomierne) i $\hat{t}_i \in \hat{\mathcal{T}}_2$ (\neg równomierne) z Q_2^{nu} :

$$\hat{E}_c = 0.27 > \hat{E}_d = 0.01.$$

Wybór $\{\hat{t}_i\}_{i=0}^m$ musi uwzględnić geometrię rozrzutu zredukowanych danych Q_m . □

a) SPDC* dla γ w \mathbb{R}^n :



Rys. 8. Geometria rozrzutu Q_m (z $d_{i+1} = \|q_{i+1} - q_i\|$) $\Rightarrow \{\hat{t}_i\}_{i=0}^m \approx \{t_i\}_{i=0}^m$.

Np. z $Q^{i,3} = (q_i, q_{i+1}, q_{i+2})$ ($Q^{i,4} = (q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3})$) \Rightarrow **sklejane funkcje kawałkami kwadratowe (kubiczne) $\hat{\gamma}_{L_m}(2,3)$ - CC2 (CC3)**

b) 4PQ: przedziałowo-kwadratowa $\hat{\gamma}_{Q_m}$ dla γ w \mathbb{R}^2 ściśle wypukłej i próbkowanej w takt $V^{mol\dagger}$:

$$Q^{i,4} \Rightarrow? \hat{T}_i = \{0, 1, \alpha_i, \beta_i\} \quad i \quad ? Q^i : [0, \beta_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Q^i(0) = q_i, \quad Q^i(1) = q_{i+1}, \quad Q^i(\alpha_i) = q_{i+2}, \quad Q^i(\beta_i) = q_{i+3}, \quad (10)$$

$$1 < \alpha_i < \beta_i. \quad (11)$$

***Skumulowana parametryzacja długością cięciwy.**

† V^{mol} - próbkowanie mniej lub bardziej równomierne.

WYNIK 2: **Tw. 4.** $\gamma \in C^4$ na płaszczyźnie ściśle wypukła oraz $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol} \Rightarrow \exists!$ 1 rozwiązanie problemu (10, 11) i:

$$d(\hat{\gamma}_{Q_m}) - d(\gamma) = O(\delta^4) \quad \hat{\gamma}_{Q_m} \circ \psi_m - \gamma = O(\delta^4). \quad (12)$$

- (12) ostre i asymptotyka w **IN4PQ** jak w **IPL** z $r = 3$ z **Tw. 2***
- (12) \Rightarrow lepszą asymptotykę niż **Tw. 3[†]** (z $\hat{t}_i = i/m$)
- dobra aproksymacja na danych rzadkich + min. skoki pochodnych w “złączach sklejanania” **4PQ**
- **wady 4PQ:** $n = 2 + \gamma$ ściśle wypukła + specjalne próbkowanie V^{mol}

***Tw. 2:** $\Rightarrow O(\delta^{r+1})$ w oszacowaniu γ i $d(\gamma)$ ($r = 3 \Rightarrow O(\delta^4)$).

†**Tw. 3:** $\Rightarrow O(\delta^{\min\{3, 1+2\epsilon\}})$ w oszacowaniu γ i $O(\delta^{\min\{4, 4\epsilon\}})$ w oszacowaniu $d(\gamma)$.

WYNIK 3: **Tw. 5.** **INL z SPDC**, $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^\delta$ ($m\delta = O(1)$) w estymacji $d(\gamma)$:

$$d(\hat{\gamma}_{L_m(r)}) - d(\gamma) = O(\delta^{r+1}) \quad \hat{\gamma}_{L_m(r)} \circ \psi_{r,m} - \gamma = O(\delta^{r+1}). \quad r = 2, 3 \quad (13)$$

$$Z^* \gamma \in C^4, t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1} = O(\delta^{1+\varepsilon}) \quad \varepsilon \geq 0 \Rightarrow d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) - d(\gamma) = O(\delta^{3+\min\{1,\varepsilon\}}). \quad (14)$$

- (13, 14) ostre i asymptotyka **INL (CC2(3))** jak w **IPL** z $r = 2, 3$ w **Tw. 2**
- (13, 14) \Rightarrow lepszą asymptotykę od **Tw. 3** ($O_\gamma(\delta^{\min\{3, 1+2\varepsilon\}})$, $O_{d(\gamma)}(\delta^{\min\{4, 4\varepsilon\}})$)
- **CC2(3)** \Rightarrow dobrą aproksymację na danych rzadkich
- dowolna krzywa w \mathbb{R}^n i dowolne próbkowanie
- min. skoki pochodnych w “złączach sklejanania” **CC2(3)**

$$* \text{ **WYNIK 0:** **Tw. 0.** } \{t_i\}_{i=0}^m \in V^\varepsilon, r = 2l, \text{ to **IPL** } \Rightarrow d(\tilde{\gamma}_r) - d(\gamma) = O(\delta^{r+1+\min\{1,\varepsilon\}})$$

- (14) tak jak **INL** z $r = 2$.

Przyk. 7: Spirala $\gamma_s : [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 5\pi]$ (z $d(\gamma_s) = 173.6$) z $\varepsilon = 0$ w (8):

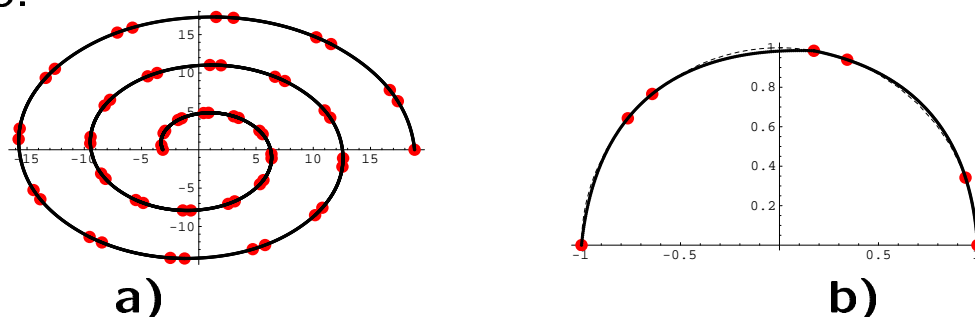
$$\gamma_s(t) = ((6\pi - t)\cos(t), (6\pi - t)\sin(t)). \quad (15)$$

4PQ ($3 \leq m \leq 60$) \Rightarrow $\alpha_{d(\gamma_s)} = 4.03$ i $|d(\gamma_s) - d(\hat{\gamma}_{Q_{60}})| = 0.065$.

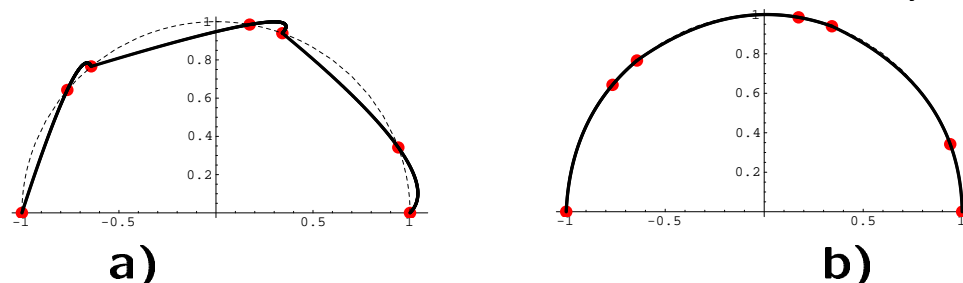
$\hat{\gamma}_{L_m(2)}$ z $\hat{t}_i = i$ $\Rightarrow |d(\gamma_s) - d(\hat{\gamma}_{L_{60}(2)})| = 7.655!$

4PQ półokrag γ_p ($3 \leq m \leq 100$) i (8) \Rightarrow $\alpha_{d(\gamma_p)} = 4.02$ i błąd w długości $\approx 10^{-9}$.

Dane rzadkie $m = 6$:



Rys. 9. 4PQ a) $\hat{\gamma}_{Q_{60}}$ dla γ_s b) $\hat{\gamma}_{Q_6}$ dla γ_p z $|d(\gamma_p) - d(\hat{\gamma}_{Q_6})| = 0.0097$.

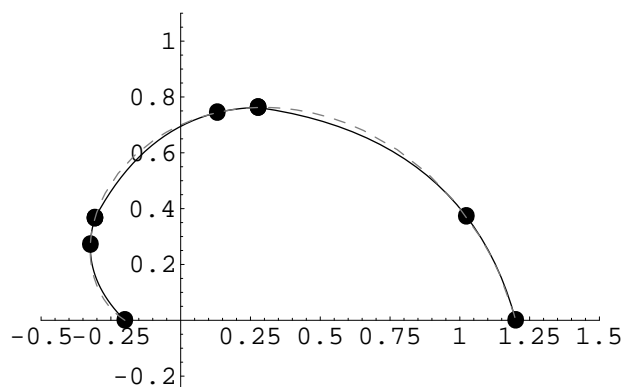


Rys. 10. $\hat{\gamma}_{L_6(2)}$ i $|d(\gamma_p) - d(\hat{\gamma}_{L_6(2)})|$ dla γ_p a) 0.06 z $\hat{t}_i = i$ b) 0.0072 z SPDC*. \square

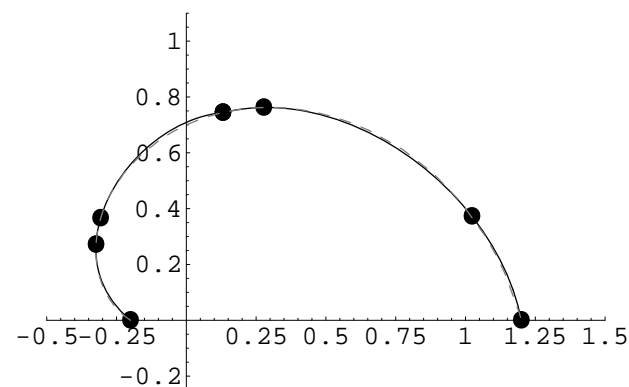
* (8) z **CC2** ($6 \leq m \leq 150$) dla $\gamma_p \Rightarrow$ $\alpha_{d(\gamma_p)} = 4.07$ (rozbieżność z $\hat{t}_i = i$ i $\hat{\gamma}_{L_m(2)}$).

Przyk. 8: Spirala $\gamma_{sp} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($d(\gamma_{sp}) = 2.45$) z $\varepsilon = 0$ w (8):

$$\gamma_{sp}(t) = (t + 0.2)(\cos(\pi(1 - t)), \sin(\pi(1 - t))). \quad (16)$$



a)



b)

Rys. 11. 7 pktów z γ_{sp} interpolowanych przez a) CC2 b) CC3.

Błędy w długościach (z $m = 6$) rzędu $10^{\{-2, -3\}}$ (CC2,3).

Oszacowania asymptotyk dla CC2(3) (z $2(i 3) \leq m \leq 200(i 198)$):

$$\alpha_d(\gamma_{sp}) = 3.03$$

$$\alpha_d(\gamma_{sp}) = 3.96$$

\Rightarrow ostrość Tw. 5.

Błędy w długościach rzędu $10^{\{-7, -9\}}$ (CC2,3).

□

Przyk. 9: a) $\gamma_{c1}(t) = (t, -t^3)$ z $t \in [-0.5, 0.5]$ (z pktem przegięcia $(0, 0)$). Próbkowanie $t_i = s_i - 0.5$, z

$$s_0 = 0, \quad s_1 = \frac{1}{m}, \quad s_2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^{3/2}}, \quad s_3 = \frac{2}{m},$$

$$s_4 = \frac{2}{m} + \frac{1}{m^{3/2}}, \quad s_5 = \frac{3}{m}, \quad \dots, \quad s_m = 1. \quad (17)$$

nie jest **mniej lub bardziej równomierne** (4PQ - nie stosuje się).

CC2 $\hat{\gamma}_{L_{100}(2)} (2 \leq m \leq 100) \Rightarrow \alpha_{d(\gamma_{c1})} = 3.68 > 3.$

b) Krzywa kubiczna γ_c próbkowana jak w (8) (ε -równomiernie) z $m = 40, 42, \dots, 200$:

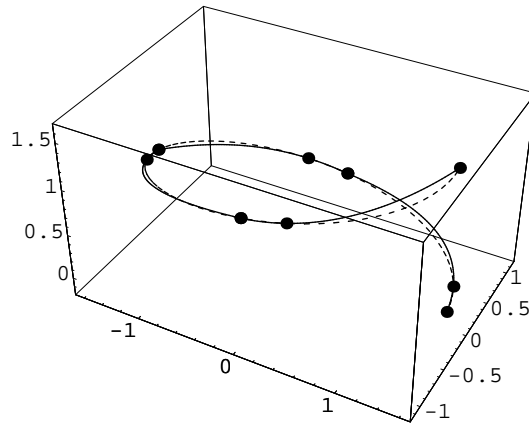
	ε_0	$\varepsilon_{1/10}$	$\varepsilon_{1/4}$	$\varepsilon_{1/2}$	$\varepsilon_{3/4}$	ε_1	ε_3	ε_5
$\alpha_{d(\gamma_c)}$	2.98	3.09	3.27	3.51	3.76	4.01	3.98	3.99
$\alpha_{T_{w.5}}$	3.00	3.10	3.25	3.50	3.75	4.00	4.00	4.00

Tab. 3. Asymptotyki w oszacowaniu $d(\gamma_c)$ przez **CC2**.

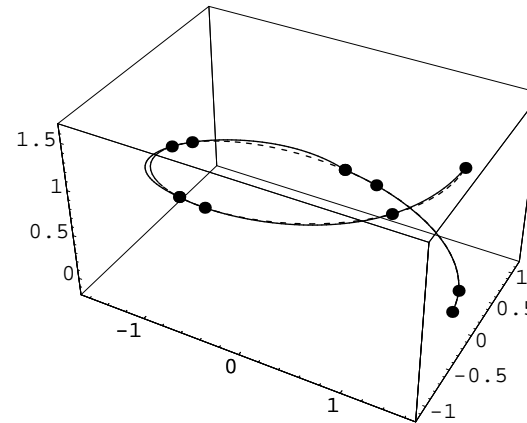
□

Przyk. 10: Eliptyczna helikoida* ($d(\gamma_{eh}) = 8.1$) z $t_i = 2\pi s_i$ s_i z (17)) $\gamma_{eh} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\gamma_{eh}(t) = (1.5 \cos t, \sin t, t/4) \quad (18)$$



a)



b)

Rys. 10. 8 (9) pktów z γ_{eh} interpolowanych przez a) **CC2** b) **CC3**.

Błędy w długościach (z $m = 8(9)$) rzędu $10^{\{-2,-3\}}$ (**CC2,3**).

Oszacowania asymptotyk dla **CC2(3)** (z $2(i 3) \leq m \leq 200(i 300)$):

$$\alpha_{d(\gamma_{eh})} = 3.91$$

$$\alpha_{d(\gamma_{eh})} = 4.01$$

\Rightarrow **ostrość Tw. 5.**

Błędy w długościach rzędu $10^{\{-7,-9\}}$ (**CC2,2**).

□

***4PQ** nie stosuje się dla $n = 3$.

Czy $\mathbf{CC}(r)$ z $r \geq 4$ w **INL** $\Rightarrow \approx \gamma$ i $d(\gamma)$ rzędu $O(\delta^{r+1})$ - tak jak z $r = 2, 3$ w **INL** (i podobnie jak $\forall r$ w **IPL**)?

WYNIK 4: **Tw. 6.** $\gamma \in C^{4+l}$ ($l = 1, 2$) próbkowana ε -równomiernie ($\varepsilon > 0$), **CC4** $\hat{\gamma}_{L_m(4)} \Rightarrow$

$$d(\hat{\gamma}_{L_m(4)}) - d(\gamma) = O(\delta^{\min\{4+l, 4+l\varepsilon\}}) \quad \hat{\gamma}_{L_m(4)} \circ \psi_{4,m} - \gamma = O(\delta^{\min\{5, 4+\varepsilon\}}). \quad (19)$$

$\gamma \in C^5$ próbkowana **mniej lub bardziej równomiernie** \Rightarrow

$$d(\hat{\gamma}_{L_m(4)}) = d(\gamma) + O(\delta^4) \quad \hat{\gamma}_{L_m(4)} \circ \psi_{4,m} = \gamma + O(\delta^4). \quad (20)$$

- (19) i (20) **ostre** (krzywa w \mathbb{R}^n)
- próbkowania $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol} \subset V^\delta$ **CC4** $\not\Rightarrow$ przyspieszenia zbieżności
- **CC4** \Rightarrow przyspieszenie zbieżności tylko dla pewnych **podrodzin** V^δ (np. $V^{\varepsilon>0} \subset V^\delta$)
- **CC4** - podobne własności aproksymacyjne jak **CC2(3)**

Przyk. 11: CC4 + półokrąg γ_p , spirala γ_{sp} i eliptyczna helikoida γ_{eh} ($\gamma \in C^6$; $l = 2$ w Tw. 6).

2 rodziny próbkowań (dla $4 \leq m \leq 280$): (8) i

$$t_i = \frac{2\pi i}{m} + (\text{Random}[] - 0.5) \frac{2\pi}{m^{1+\varepsilon}}. \quad (21)$$

	ε_0	$\varepsilon_{1/10}$	$\varepsilon_{1/5}$	$\varepsilon_{1/4}$	$\varepsilon_{1/3}$	$\varepsilon_{1/2}$	$\varepsilon_{2/3}$	$\varepsilon_{3/4}$	$\varepsilon_{9/10}$	ε_1
$\gamma_p^{(8)}$	3.98	4.19	4.39	4.48	4.65	4.97	5.30	5.42	5.71	6.05
$\gamma_{sp}^{(8)}$	3.95	4.14	4.31	4.38	4.49	4.68	5.27	5.67	6.08	6.02
$\gamma_{eh}^{(8)}$	4.02	4.19	4.39	4.48	4.66	5.02	5.35	7.09	5.84	5.97
$\gamma_{eh}^{(21)}$	4.11	4.30	4.46	4.54	4.85	5.33	5.72	5.75	5.78	5.95
$\alpha_{\text{Tw.6}}$	4.00	4.20	4.40	4.50	4.66	5.00	5.33	5.50	5.80	6.00

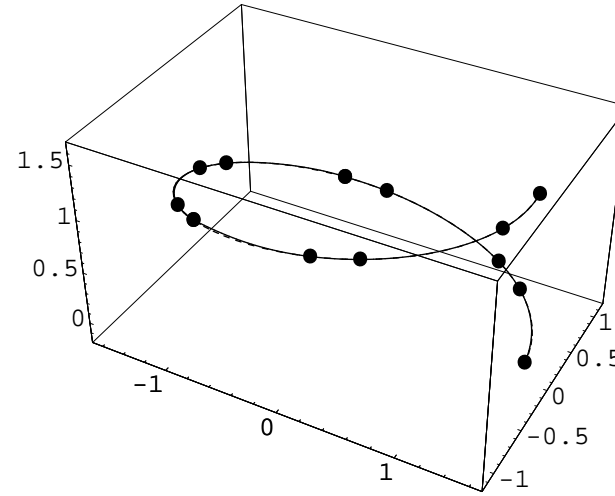
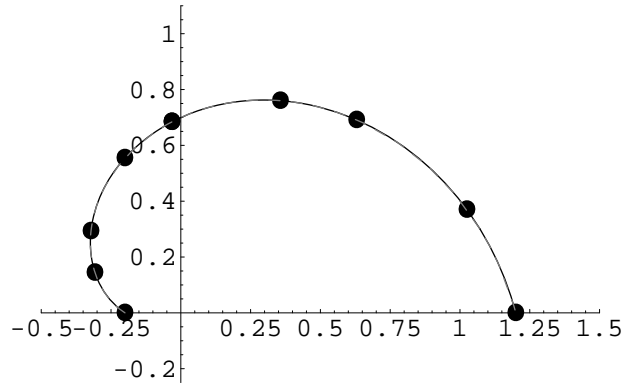
Tab. 4. Oszacowania asymptotyk dla $d(\gamma)$ z CC4 i min. α -y z Tw. 6.

Tab. 4. $\varepsilon > 0$ (próbkowań (8) i (21) ε -równomierne) \Rightarrow **ostrość** (19).

Tab. 4. i (8) (0- i mniej lub bardziej równomierne) \Rightarrow **ostrość** (20).

□

Przyk. 12: CC4 dobrze $\approx \gamma$ i $d(\gamma)$ na zredukowanych danych rzadkich - np. z próbkowaniem (8) i $m = 8(12)$ (**a**) $\varepsilon = 0.5$ **b**) $\varepsilon = 0.1$):



Rys. 11. CC4: **a)** $\hat{\gamma}_{L_8(4)}$ dla γ_{sp} **b)** $\hat{\gamma}_{L_{12}(4)}$ dla γ_{eh} .

Błędy w długościach:

$$d(\hat{\gamma}_{L_8(4)}) = d(\gamma_{sp}) + 2.37 \times 10^{-4}, \quad d(\hat{\gamma}_{L_{12}(4)}) = d(\gamma_{eh}) - 1.646 \times 10^{-2}.$$

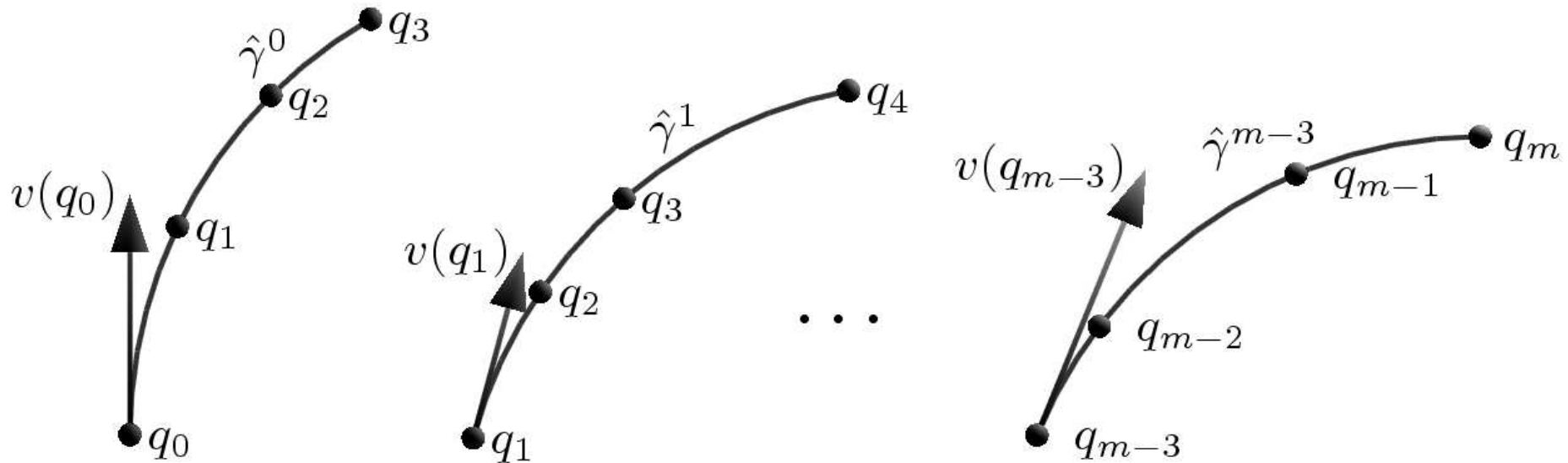
Różnice między krzywą γ a interpolantem $\hat{\gamma}_{L_{\{8,12\}}(4)}$ **niewidoczne.**

Skoki pochodnych w pktach sklejania niewidoczne.

Gładkość w pktach sklejania: CC3 i Int. Hermite'a $\Rightarrow C^1 \ni \hat{\gamma}_H \approx \gamma$:

1. $\forall Q^{i,4}$ ($0 \leq i \leq m-3$) **CC3** $\hat{\gamma}^i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ estymuje pochodne v dla γ w q_i :

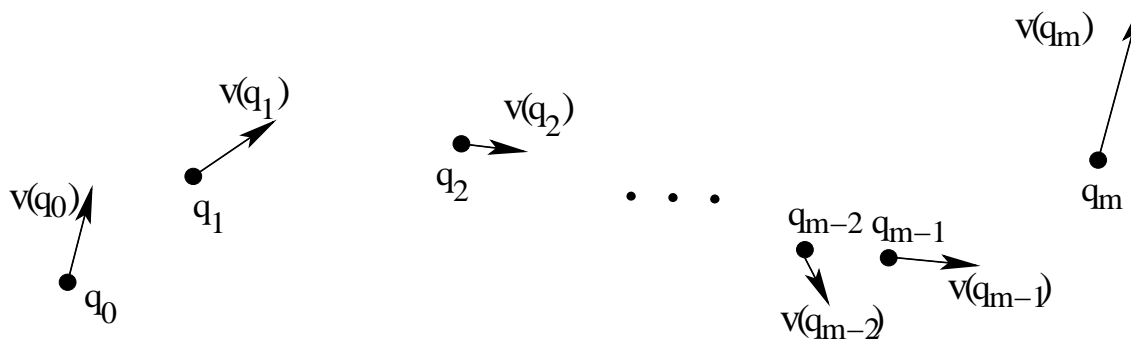
$$v(q_i) = \hat{\gamma}^i(\hat{t}_i).$$



Rys. 12. **CC3** $\Rightarrow v(q_i)$ tj. estymację stycznych do γ w pktach interpolacyjnych q_i .

2. Dla $v(q_{m-k})$ (z $0 \leq k \leq 2$) stos. **CC3** $\hat{\gamma}_R^i$ z odwrotną kolejnością pktów $Q_{m-k}^r =$

$$(q_{m-k}, q_{m-k-1}, q_{m-k-2}, q_{m-k-3}) \text{ i } v(q_{m-k}) = -\hat{\gamma}_R^{m-k'}(\hat{t}_{m-k}).$$



Rys. 13. \forall 4-ki $\{q_i, q_{i+1}\}$ i $\{v(q_i), v(q_{i+1})\}$ stosujemy interpolację Hermite'a γ_H^i z **SPDC**.

3. Interpolacja Hermite'a i SPDC $\Rightarrow C^1$ kawałkami kubiczną γ_H (CC3H): $\forall (q_i, q_{i+1}) \gamma_H^i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma_H^i(\hat{t}_i) = q_i, \quad \gamma_H^i(\hat{t}_{i+1}) = q_{i+1}, \quad \gamma_H^{i'}(\hat{t}_i) = v(q_i), \quad \gamma_H^{i'}(\hat{t}_{i+1}) = v(q_{i+1}).$$

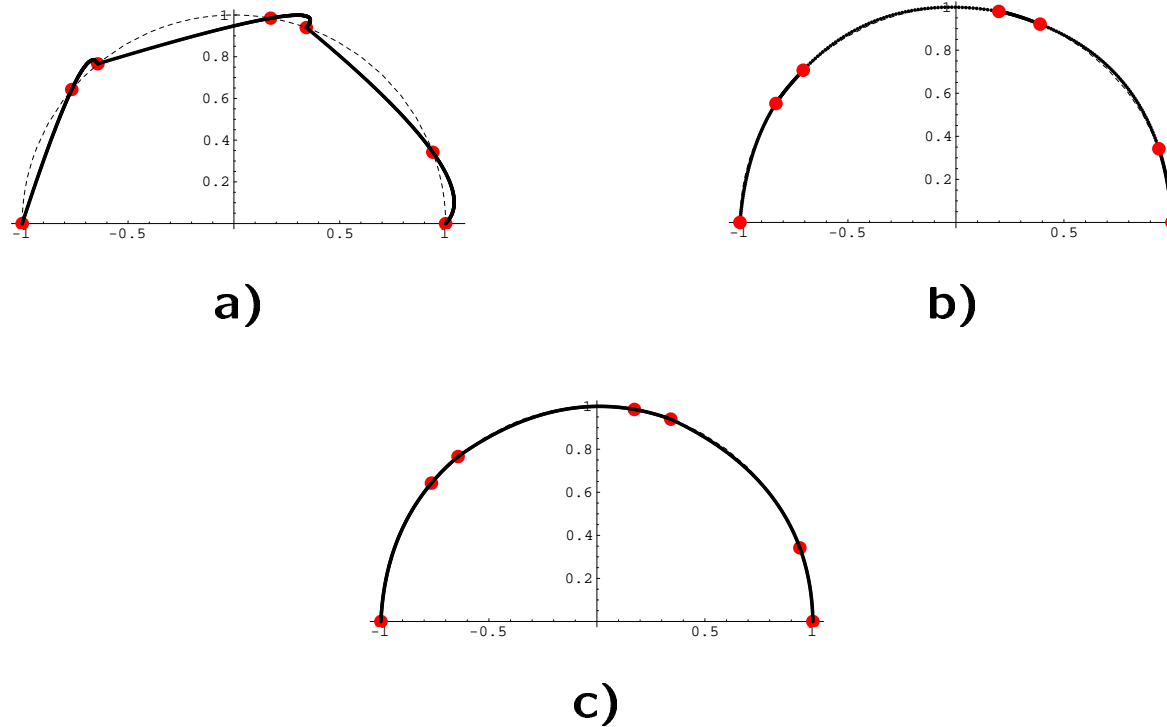
WYNIK 5: **Tw. 7.** **CC3H** w $\mathbb{R}^n \Rightarrow \gamma_H \in C^1$ z:

$$d(\gamma_H) - d(\gamma) = O(\delta^4) \quad \gamma_H \circ \phi_m - \gamma = O(\delta^4). \quad (22)$$

Asymptotyka w oszacowaniu długości wymaga $m\delta = O(1)$.

CC3H zachowuje wszystkie własności **CCr** + \Rightarrow gładkość interpolanta.

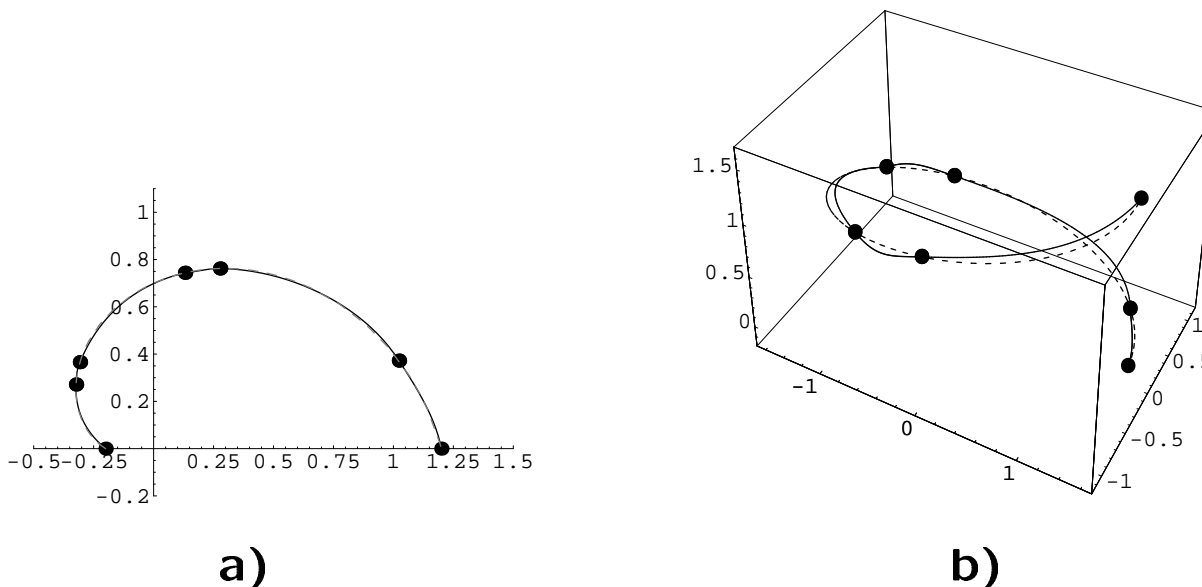
Przyk. 12: **CC3H** daje gładką krzywą.



Rys. 14. Półokrąg γ_p interpolowany przez a) $\hat{\gamma}_{L_6(2)}$ z $\hat{t}_i = i$ b) **CC3H** γ_H c) **CC2** $\hat{\gamma}_{L_6(2)}$.

CC2(3H) dają dobre estymacje pochodnych w pktach sklejania. □

Przyk. 13: Spirala γ_{sp} ($z(8)$; $\varepsilon = 0$) eliptyczna helikoida γ_{eh} ($z(t_i = 2\pi i/m$ lub $t_i = \pi(2i - 1)/m$, i parzyste lub nieparzyste) **CC3H** \Rightarrow



Rys. 15. CC3H z $m = 6$ dla a) γ_{sp} b) γ_{eh} .

Oszacowania długości z $m = 5$ (dane **rzadkie**):

$$d(\gamma_H) = d(\gamma_{sp}) + 6.122 \times 10^{-3} \quad d(\gamma_H) = d(\gamma_{eh}) - 4.5 \times 10^{-2}.$$

Oszacowania asymptotyk ($16 \leq m \leq 198$):

$$\alpha_{sp} = 4.01$$

$$\alpha_{eh} = 4.002 \Rightarrow \text{Tw. 7 ostre.}$$

Błąd w oszacowaniu długości ($m = 198$) rzędu $10^{\{-8,9\}}$ dla γ_{sp}, γ_{eh} . \square

Przyk. 13: a) Niewypukła krzywa kubiczna $\gamma_{nc} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma_{nc}(t) = (2t - 1, (2t - 1)^3),$$

z $d(\gamma_{nc}) = 3.096$ (i z (8); $\varepsilon = 0$) i z **CC3H** \Rightarrow danych rzadkich ($m = 6$):

$$d(\gamma_H) = d(\gamma_{nc}) + 3.305 \times 10^{-2}$$

oraz dla ($m = 18, 24, \dots, 198$):

$$\alpha_{d(\gamma_{nc})} = 3.96 \Rightarrow \text{Tw. 7 ostre. Dla } m = 198:$$

$$d(\gamma_H) = d(\gamma_{nc}) - 1.276 \times 10^{-9}.$$

b) eliptyczna helikoida γ_{eh} z $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol}$

$$t_i = \frac{i}{m} \quad i \text{ parzyste}, \quad t_i = \frac{i}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} \quad i \text{ nieparzyste}. \quad (23)$$

CC3H z $m = 18, 24, \dots, 198 \Rightarrow$

$$\alpha_{d(\gamma_{eh})} = 4.08 \Rightarrow \text{Tw. 7 ostre.}$$

c) krzywa 4-ego stopnia $\gamma_q(t) = (t, (t + 1)^4/8)$ ($t \in [0, 1]$) z (23) i z **CC3H** dla $m = 18, 24, \dots, 198 \Rightarrow$

$$\alpha_{d(\gamma_q)} = 4.04 \Rightarrow \text{Tw. 7 ostre.}$$

Założenia **Tw. 4 (4PQ: $n = 2$, γ wypukła i $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol}$)** zbyt częste dla **CC3H**. \square

6. Wnioski i Problemy Otwarte

Różnice - **interpolacja parametryczna versus nieparametryczna.**

Analiza problemu **zbieżność-rozbieżność** w **INL** z na **ślepo** wybranymi węzłami interpolacyjnymi - np. $\hat{t}_i = i/m$.

Geometria rozrzutu danych zredukowanych $\mathcal{Q}_m \Rightarrow \{\hat{t}_i\}_{i=0}^m \approx \{t_i\}_{i=0}^m$ (np. **SPDC, 4PQ**).

Analiza asymptotyki zbieżności dla **4PQ** i **CC(2,3,4,3H)** oraz weryfikacja ich **ostrości** (główny wkład i trudność rozprawy).

Wyniki dla **CC(2,3,4,3H)** mają charakter ogólny (tzn. γ regularna w \mathbb{R}^n i min. ograniczenia na próbkowanie).

Kompensacja starty informacji (ta sama asymptotyka dla **IN** co **IP**) przy przejściu z danych niezredukowanych do danych zredukowanych jest możliwa (np. z **CC(2,3,4,3H)**).

Podwyższenie r w **CCr** ($r \geq 4$) w **IN** \nrightarrow przyspieszenia zbieżności do γ i $d(\gamma)$ (w **IP** zbieżności są rzędu $O(\delta^{r+1})$).

Asymptotyka zbieżności w **CC2(3)** jest na tyle szybka (**3,4**) \Rightarrow nie ma potrzeby stosować **CCr** ($r \geq 4$).

Omówione interpolanty w **IN** \Rightarrow też dobre aproksymacje γ i $d(\gamma)$ na zredukowanych danych **rzadkich**.

Usunięcie niewidocznych (na gęstych i rzadkich danych) **nieciągłości** w pktach sklejania **CCr** i **4PQ** jest możliwe np. stosując **CC3H**.

Przykłady ilustrujące wyniki z rozprawy (+ **zastosowania**).

Wyniki rozprawy **opublikowane** w formie 13 prac (krajowe i zagraniczne czasopisma, materiały konferencyjne, rozdziały w monografiach naukowych oraz monografia habilitacyjna).

Rozszerzenia do innych parametryzacji np. **wykładniczej**

$$\hat{t}_0 = 0, \quad \hat{t}_{i+1} = \hat{t}_i + \|q_{i+1} - q_i\|^e, \quad 0 \leq e \leq 1. \quad (24)$$

Jeśli $e = 0$ **równomierne**; $e = 1$ **SPDC**; $e = 1/2$ **centripetal**.

Analiza asymptotyki dla **SPDC** i innych schamtów interpolacyjnych.

Analiza i kryteria wyboru węzłów dla **danych rzadkich**.

Dane zaszumione lub zdygitalizowane.

7. Próbkowania

Def. 2. Próbkowanie $\{t_i\}_{i=0}^m$ jest ε -równomierne ($\{t_i\}_{i=0}^m \in V^\varepsilon \subset V^\delta$), jeśli dla $\varepsilon \geq 0 \exists C^k \ni \phi : [0, T] \rightarrow [0, T]$ ($\phi > 0$)

$$t_i = \phi\left(\frac{iT}{m}\right) + O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}\right), \quad 0 \leq i \leq m. \quad (25)$$

$\{t_i\}_{i=0}^m$ jest **mniej lub bardziej równomierne** ($\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol} \subset V^\delta$), gdy dla $0 < \lambda < 1$

$$\lambda\delta \leq t_{i+1} - t_i \leq \delta, \quad 0 \leq i \leq m - 1. \quad (26)$$

- $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^\varepsilon$ to 2 typy perturbacji próbkowania równomiernego: poprzez dyfeomorfizm ϕ i dodany wyraz rzędu $O(1/m^{1+\varepsilon})$
- im większy ε , tym bardziej $\{t_i\}_{i=0}^m$ przybliża próbkowanie równomierne (por. (8)). $\varepsilon = 0$ wymaga dodatkowej analizy
- $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^{mol}$: różnice pomiędzy kolejnymi węzłami są ani duże ani małe w stosunku do T/m
- $V^\varepsilon \not\subset V^{mol}$ (choć $V^{\varepsilon>0} \subset V^{mol}$) i $V^{mol} \not\subset V^{\varepsilon>0}$

$\{t_i\}_{i=0}^m$ ε -równomierne:

a) INL \Rightarrow

WYNIK 1. **Tw. 3.** $\gamma \in C^4$, $\{t_i\}_{i=0}^m$ ε -równomierne to dla $\hat{\gamma}_{L_m(2)}$ i $\hat{t}_i = i/m$ z $\varepsilon > 0$:

$$\hat{\gamma}_{L_m(2)} \circ \psi_m - \gamma = O(\delta^{\min\{3, 1+2\varepsilon\}}), \quad d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) - d(\gamma) = O(\delta^{\min\{4, 4\varepsilon\}}), \quad (27)$$

gdzie $\psi_m : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, $\psi > 0$. Jeśli $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^0 \cap V^{mol}$ wtedy (27) prawdziwe z $\varepsilon = 0$.

b) IPL \Rightarrow

WYNIK 0. **Tw. 0.** Jeśli $\gamma \in C^{r+2}$, r parzyste, $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^\varepsilon$ znane to asymptotyka w oszacowaniu $d(\gamma)$ z **Tw. 2** (tzn. $O(\delta^{r+1})$) poprawia się do:

$$d(\tilde{\gamma}_{L_m(r)}) - d(\gamma) = O(\delta^{r+1+\min\{1, \varepsilon\}}). \quad (28)$$

8. Asymptotyka

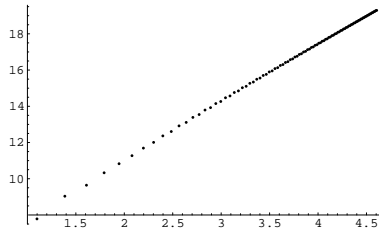
$$T = t_m - t_0 = \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) \leq m\delta \Rightarrow \boxed{\frac{T}{m} \leq \delta}.$$

Tak więc dla $\alpha \geq 0$ jeśli $f = O(\frac{1}{m^\alpha}) \Rightarrow f = O(\delta^\alpha)$.

Przyk. 14. Krzywa kubiczna (bez punktu przegięcia)

$$\gamma_c(t) = (t, -t^3), \quad (29)$$

z $t \in [0.1, 0.5]$ próbkowana jak w (7). Dla $\varepsilon_m = |d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) - d(\gamma)|$, liniowa regresja \Rightarrow



Rys. 16. $-\log \varepsilon_m$ w funkcji od $\log m$ dla γ_c i $3 \leq m \leq 100$ z $\alpha_{d(\gamma_c)} = 3.191$.

By **Tw. 5** $\Rightarrow \alpha = 3 < \alpha_{d(\gamma_c)} = 3.191$. □

9. CC4 - Dowód

CC4 nie podwyższa asymptotyki w **Tw. 5** do zbieżności **5-ego** rzędu.

Tw. 5 wykorzystuje **ograniczonosc różnic dzielonych k-tego rzędu** wielomianu Lagrange'a $\psi_r^i[t_i, t_{i+r}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+r}]$ ($1 \leq k \leq r; r = 2, 3$) $\psi_r^i(t_{i+j}) = \hat{t}_{i+j}$ ($0 \leq j \leq r$).

Przyk. 15 Dla zaburzonego próbkowania równomiernego $\{t_i\}_{i=0}^m \in V^0 \cap V^{mol}$, $\psi_4^i : [t_i, t_{i+4}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+4}]$

$$t_{i+k} = \frac{i+k}{m} \quad (k = 0, 1, 3, 4), \quad t_{i+2} = \frac{i+2}{m} + \frac{1}{2m}$$

$\Rightarrow \psi_4^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}, t_{i+4}] = O(m)$ - **nieograniczone!**

Lemat 1. $\{t_i\}_{i=0}^m$ ε -równomierne ($\varepsilon > 0$) \Rightarrow

$$\psi_4^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}, t_{i+4}] = O(\delta^{\min\{0, \varepsilon-1\}}). \quad (30)$$

$\{t_i\}_{i=0}^m$ **mniej lub bardziej równomierne** \Rightarrow (30) *prawdziwe* z $O(\delta^{-1})$.

10. Szkic Dowodu Tw. 7 dla CC3H

CC3 $\Rightarrow \hat{\gamma}^i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\hat{\gamma}^i(\hat{t}_i) = q_i, \quad \hat{\gamma}^i(\hat{t}_{i+1}) = q_{i+1}, \quad \hat{\gamma}^i(\hat{t}_{i+2}) = q_{i+2}, \quad \hat{\gamma}^i(\hat{t}_{i+3}) = q_{i+3}$$

i reparametryzację **kubiczną** $\psi^i : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$

$$\psi^i(t_i) = \hat{t}_i, \quad \psi^i(t_{i+1}) = \hat{t}_{i+1}, \quad \psi^i(t_{i+2}) = \hat{t}_{i+2}, \quad \psi^i(t_{i+3}) = \hat{t}_{i+3}.$$

Z Tw. 5 wiemy, że:

Lemat 2. Dla $\gamma \in C^4 \Rightarrow \psi^i = 1 + O(\delta^2)$, $\dot{\psi}^i = O(\delta)$ i $\frac{d^3\psi^i}{dt^3} = O(1)$.

Lemat 3. Dla $\gamma \in C^4$ i $s \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \Rightarrow \hat{\gamma}^i, \frac{d\hat{\gamma}^i}{ds}, \frac{d^2\hat{\gamma}^i}{ds^2}, \frac{d^3\hat{\gamma}^i}{ds^3}$ są $O(1)$.

Lemat 4. Dla $\gamma \in C^4$ i $t \in [t_i, t_{i+3}] \Rightarrow$

$$\gamma(t) - (\hat{\gamma}^i \circ \psi^i)(t) = O(\delta^4), \quad \dot{\gamma}(t) - \frac{d(\hat{\gamma}^i \circ \psi^i)}{dt}(t) = O(\delta^3).$$

Dla γ_H z $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}\gamma_H^i(\hat{t}_i) &= q_i, & \gamma_H^i(\hat{t}_{i+1}) &= q_{i+1}, \\ \gamma_H^{i'}(\hat{t}_i) &= \hat{\gamma}^i(\hat{t}_i), & \gamma_H^{i'}(\hat{t}_{i+1}) &= \hat{\gamma}^{i+1}(\hat{t}_{i+1}).\end{aligned}$$

przeparametryzujemy γ_H^i z kubiczną $\phi^i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$:

$$\phi^i(t_i) = \hat{t}_i, \quad \phi^i(t_{i+1}) = \hat{t}_{i+1}, \quad \dot{\phi}^i(t_i) = \dot{\psi}^i(t_i), \quad \dot{\phi}^i(t_{i+1}) = \dot{\psi}^{i+1}(t_{i+1}),$$

$$\begin{aligned}\phi^i(t) &= \phi^i[t_i] + \phi^i[t_i, t_i](t - t_i) + \phi^i[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 \\ &\quad + \phi^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}).\end{aligned}$$

Następnie wykazujemy:

$$\phi^i[t_i, t_i] = 1 + O(\delta^2), \quad \phi^i[t_i, t_i, t_{i+1}] = O(\delta),$$

$$\phi^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] = O(1) + \frac{O(\delta^2)}{(t_{i+1} - t_i)^2}.$$

Lemat 5. Dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\dot{\phi}^i = 1 + O(\delta^2), \quad \ddot{\phi}^i = O(\delta) + \frac{O(\delta^2)}{t_{i+1} - t_i}, \quad \frac{d^3\phi^i}{dt^3} = O(1) + \frac{O(\delta^2)}{(t_{i+1} - t_i)^2}.$$

I dalej

$$\gamma_H^i[\hat{t}_i, \hat{t}_i] = O(1) = \gamma_H^i[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}], \quad \gamma_H^i[\hat{t}_i, \hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+1}] = O(1) + \frac{O(\delta^2)}{(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i)^2}.$$

Lemat 6. Dla $\hat{t} \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$

$$\gamma_H^{i'} = O(1), \quad \gamma_H^{i''} = O(1) + \frac{O(\delta^2)}{t_{i+1} - t_i}, \quad \frac{d^3 \gamma_H^i}{dt^3} = O(1) + \frac{O(\delta^2)}{(t_{i+1} - t_i)^2}.$$

Dla oszacowania krzywej w $[t_i, t_{i+1}]$, Lemat 4 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \gamma(t) - (\gamma_H^i \circ \phi^i)(t) &= \gamma(t) - (\hat{\gamma}^i \circ \psi^i)(t) + (\hat{\gamma}^i \circ \psi^i)(t) - (\gamma_H^i \circ \phi^i)(t) \\ &= O(\delta^4) + (\hat{\gamma}^i \circ \psi^i)(t) - (\gamma_H^i \circ \phi^i)(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Aby udowodnić 1szą asymptotykę z **Tw. 7** wystarczy pokazać:

$$\rho^i = \hat{\gamma}^i \circ \psi^i - \gamma_H^i \circ \phi^i = O(\delta^4).$$

Interpolacyjna Formuła Newtona, dla $t \in [t_i, t_{i+1}] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \rho^i(t) = & \rho^i[t_i] + \rho^i[t_i, t_i](t - t_i) + \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}](t - t_i)^2 \\ & + \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}](t - t_i)^2(t - t_{i+1}) \\ & + (t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t] . \end{aligned}$$

Następnie pokazujemy:

$$\rho^i[t_i] = \rho^i[t_i, t_i] = \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}] = 0 , \quad \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] = \frac{O(\delta^3)}{(t_{i+1} - t_i)^2} ,$$

i stąd

$$\boxed{\rho^i(t) = O(\delta^4) + (t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t] .}$$

Jeśli $1 \leq j \leq n$ & $\tilde{t}_j^i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t]_j = \frac{1}{4!} \frac{d^4 \rho_j^i}{dt^4}(\tilde{t}_j^i) ,$$

z Tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej i z **Lematów 2,3,5,6** \Rightarrow

$$\boxed{(t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t] = O(\delta^4) .}$$

Oszacowanie krzywej na $[0, T]$:

$$\gamma(t) - (\gamma_H^i \circ \phi^i)(t) = O(\delta^4) .$$

Dla estymacji pochodnych, na $[t_i, t_{i+1}]$, z Lematu 4:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) - \frac{d(\gamma_H^i \circ \phi^i)}{dt}(t) &= \dot{\gamma}(t) - \frac{d(\tilde{\gamma}^i \circ \psi^i)}{dt}(t) + \frac{d(\tilde{\gamma}^i \circ \psi^i)}{dt}(t) - \frac{d(\gamma_H^i \circ \phi^i)}{dt}(t) \\ &= O(\delta^3) + \dot{\rho}^i(t) . \end{aligned}$$

Z symetrii, ciągłości i definicji różnic dzielonych:

$$\dot{\rho}^i(t) = O(\delta^3) + \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t, t](t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 .$$

Jeśli $1 \leq j \leq n$ & $\tilde{t}_j^i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t, t]_j = \frac{1}{5!} \frac{d^5 \rho_j^i}{dt^5}(\tilde{t}_j^i) ,$$

z Tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej i z Lematów 2,3,5,6

$$(t - t_i)^2(t - t_{i+1})^2 \rho^i[t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}, t, t] = O(\delta^4) .$$

Dla $f^i = \gamma_H^i \circ \phi^i - \gamma$ ($t \in [t_i, t_{i+1}]$) pokazaliśmy

$$\boxed{f^i = O(\delta^4), \quad \dot{f}^i = O(\delta^3).} \quad (32)$$

Niech $v(t)$ będzie **projekcją** \dot{f} na $\dot{\gamma}(t)^\perp$. Ponieważ $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$

$$\dot{f}^i(t) = \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t) + v(t),$$

i $v(t) = O(\delta^3)$ z (32). Stąd dla γ_H^i **przeparametryzowanej** jako $\tilde{\gamma}_H^i = \gamma_H^i \circ \phi^i$:

$$\dot{\tilde{\gamma}}_H^i(t) = (1 + \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle) \dot{\gamma}(t) + v(t),$$

i skoro $\langle \dot{\gamma}(t), v(t) \rangle = 0$, $\|\dot{\gamma}\| = 1$ i $(1 + \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle)^{-2} \|v(t)\|^2 > -1 + \varepsilon$:

$$\boxed{\|\dot{\tilde{\gamma}}_H^i(t)\| - \|\dot{\gamma}(t)\| = \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + O(\delta^6).} \quad (33)$$

Z $f^i(t_i) = f^i(t_{i+1}) = \vec{0}$ i całkowania przez części, (32) oraz (33):

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|\tilde{\gamma}_H^i(t)\| - \|\dot{\gamma}(t)\|) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\delta^7) \\ &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle f(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\delta^7) \\ &= O(\delta^5) . \end{aligned}$$

Stąd, na $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ jako, że $d(\gamma_H^i) = d(\tilde{\gamma}_H^i)$ ($\phi^i > 0$):

$$\boxed{d(\gamma_H^i) - d(\gamma_i) = O(\delta^5) ,}$$

gdzie $d(\gamma_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

Stąd mając na uwadze $m\delta = O(1)$, mamy

$$\boxed{\boxed{d(\gamma_H) - d(\gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} (d(\gamma_H^i) - d(\gamma_i)) = O(\delta^4) .}}$$

Dowód Tw. 7 jest zakończony.

11. Szkic Dowodu Tw. 5 dla CC2(3)

Reparametryzujemy

$$\hat{\gamma}_2^i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{CC2})$$

$$\hat{\gamma}_3^i : [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{CC3})$$

z interpolacją kwadratową/kubiczną Lagrange'a $\psi_k^i : [t_i, t_{i+k}] \rightarrow [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+k}]$, $k = 2, 3$:

$$\begin{aligned} \psi_{2,3}^i(t_i) &= \hat{t}_i, & \psi_{2,3}^i(t_{i+1}) &= \hat{t}_{i+1}, & \psi_{2,3}^i(t_{i+2}) &= \hat{t}_{i+2}, \\ \psi_3^i(t_{i+3}) &= \hat{t}_{i+3}. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^i(t) &= \psi_2^i(t_i) + \psi_2^i[t_i, t_{i+1}](t - t_i) + \psi_2^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t - t_i)(t - t_{i+1}), \\ \psi_3^i(t) &= \psi_3^i(t_i) + \psi_3^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}](t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}). \end{aligned} \quad (35)$$

Dla asymptotyki ψ_k^i , $\ddot{\psi}_k^i$, $\frac{d^3\psi_k^i}{dt^3}$ analizujemy różnice dzielone ψ_k^i .

Lemat 7. $\gamma \in C^3 \Rightarrow \psi_{2,3}^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}] = 1 + O(\delta^2)$, $j = 0, 1$, $\psi_{2,3}^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] = O(\delta)$.

Dowód: Dla **SPDC** (z $0 \leq j \leq 1$):

$$\psi_{2,3}^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}] = \|\gamma[t_{i+j}, t_{i+j+1}]\|.$$

Z Tw. Taylor'a

$$\begin{aligned} \psi_{2,3}^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}] &= \frac{\|\gamma(t_{i+j+1}) - \gamma(t_{i+j})\|}{t_{i+j+1} - t_{i+j}} \\ &= \|\dot{\gamma}(t_{i+j}) + (t_{i+j+1} - t_{i+j})\frac{\ddot{\gamma}(t_{i+j})}{2} + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^2)\|. \end{aligned}$$

$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle \equiv 0$ jako, że $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$. Stąd

$$\psi_{2,3}^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}] = \sqrt{1 + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^2)} = 1 + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^2).$$

$$\psi_{2,3}^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}] = \frac{\psi_{2,3}^i[t_{i+1}, t_{i+2}] - \psi_{2,3}^i[t_i, t_{i+1}]}{t_{i+2} - t_i} = O(\delta).$$

Lemat 8. Dla $\gamma \in C^4$ mamy: $\psi^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}, t_{i+j+2}] = O(\delta^{1+\varepsilon})$, $0 \leq j \leq k-1$. Jeśli $k = 3$, to $\psi^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] = O(1)$.

Dowód: Z Tw. Taylor'a $\psi_{2,3}^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}] = \|\gamma[t_{i+j}, t_{i+j+1}]\|$

$$\|\dot{\gamma}(t_{i+j}) + \frac{\ddot{\gamma}(t_{i+j})}{2}(t_{i+j+1} - t_{i+j}) + \frac{d^3\gamma}{dt^3} \frac{(t_{i+j+1} - t_{i+j})^2}{6} + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^3)\|,$$

gdzie $\frac{d^3\gamma}{dt^3}$ liczone w punkcie t_{i+j} ($0 \leq j \leq 2$).

Jako, że $\|\dot{\gamma}\| = 1$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \equiv 1, \quad \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0, \quad \left\langle \frac{d^3\gamma}{dt^3}, \dot{\gamma} \right\rangle \equiv -\langle \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = -\kappa(t)^2,$$

gdzie $\kappa(t)$ jest krzywizną γ . Stąd

$$\begin{aligned} \|\gamma[t_{i+j}, t_{i+j+1}]\| &= \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{12}(t_{i+j+1} - t_{i+j})^2 + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^3)} \\ &= 1 - \frac{\kappa^2}{24}(t_{i+j+1} - t_{i+j})^2 + O((t_{i+j+1} - t_{i+j})^3). \end{aligned}$$

Stąd dla $0 \leq j \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \psi^i[t_{i+j}, t_{i+j+1}, t_{i+j+2}] &= -\kappa^2 \frac{(t_{i+j+2} - t_{i+j+1})^2 - (t_{i+j+1} - t_{i+j})^2}{24(t_{i+j+2} - t_{i+j})} \\
 &\quad + O((t_{i+3} - t_i)^2) \\
 &= -\frac{\kappa^2}{24}(t_{i+j+2} - 2t_{i+j+1} + t_{i+j}) + O((t_{i+3} - t_i)^2), \\
 &= O(\delta^{1+\min\{1,\varepsilon\}}),
 \end{aligned}$$

gdzie κ jest liczona w punkcie t_i . Dowód 1szej części jest zakończony.

Dla $k = 3$:

$$\begin{aligned}
 \psi_3^i[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}] &= -\frac{\kappa^2}{24} \frac{(t_{i+3} - 3t_{i+2} + 3t_{i+1} - t_i)}{t_{i+3} - t_i} + O(t_{i+3} - t_i) \\
 &= O(1),
 \end{aligned}$$

gdzie κ jest liczona w punkcie t_i .

Z Lematu 7,8 i (35):

Lemat 9. Dla $\gamma \in C^3$, $\psi_{2,3}^i = 1 + O(\delta^2)$ i $\ddot{\psi}_{2,3}^i = O(\delta)$. Dla $\gamma \in C^4$, $\frac{d^3\psi_3^i}{dt^3} = O(1)$.
Również jeśli $\gamma \in C^4$ & $t_{i+2} - 2t_{i+1} + t_i = O(\delta^{1+\varepsilon})$ wtedy $\ddot{\psi}_2^i = O(\delta^{1+\min\{1,\varepsilon\}})$.

Lemat 10. Dla $\gamma \in C^3$ $s \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+k}]$, $\frac{d\hat{\gamma}_{2,3}^i}{ds}$, $\frac{d^2\hat{\gamma}_{2,3}^i}{ds^2}$ są $O(1)$. Dla $k = 3$ i jeśli γ jest C^4 ,
wtedy $\frac{d^3\hat{\gamma}_k^i}{ds^3}$ jest $O(1)$.

Dowód: Jeśli $k=2$: wtedy dla $\hat{t} \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]$

$$\hat{\gamma}_2^i(\hat{t}) = \hat{\gamma}_2^i(\hat{t}_i) + \hat{\gamma}_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}](\hat{t} - \hat{t}_i) + \hat{\gamma}_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}](\hat{t} - \hat{t}_i)(\hat{t} - \hat{t}_{i+1}).$$

Ponieważ $\xi_2^i = \gamma \circ \psi_2^{i-1}$ pokrywa się z $\hat{\gamma}_2^i$ w (t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) :

$$\hat{\gamma}_2^i(\hat{t}) = \xi_2^i(\hat{t}_i) + \xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}](\hat{t} - \hat{t}_i) + \xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}](\hat{t} - \hat{t}_i)(\hat{t} - \hat{t}_{i+1}).$$

(36)

Dla każdego $1 \leq l \leq n$, istnieje $\tilde{s}_l, \hat{s}_l \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+2}]$

$$\xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]_l = \xi_{2l}^{i'}(\tilde{s}_l), \quad \xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}]_l = \frac{\xi_{2l}^{i''}(\hat{s}_l)}{2}.$$

Z Tw. o róż. fun. złoż. i **Lematu 9**:

$$\xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]_l = O(1), \quad \xi_2^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}]_l = O(1),$$

i stąd z (36)

$$\boxed{\hat{\gamma}_2^{i'} = O(1), \quad \hat{\gamma}_2^{i''} = O(1).} \quad (37)$$

Analogicznie dla **k=3**

$$\xi_3^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]_l = O(1), \quad \xi_3^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}]_l = O(1),$$

$$\xi_3^i[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}]_l = O(1),$$

Stąd

$$\boxed{\hat{\gamma}_3^{i'} = O(1), \quad \hat{\gamma}_3^{i''} = O(1), \quad \hat{\gamma}_3^{i'''} = O(1).} \quad (38)$$

Dla $k = 2, 3$ wszystkie pochodne (z Lematu 9,10) funkcji

$$f_k^i \equiv \hat{\gamma}_k^i \circ \psi_k^i - \gamma : [t_i, t_{i+k}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

są $O(1)$. Ponieważ

$$f_k^i(t_i) = f_k^i(t_{i+1}) = f_k^i(t_{i+2}) = f_k^i(t_{i+3}) = \vec{O}$$

dla $0 \leq j \leq k$ z Lematu Hadamard'a

$$f^i(t) = (t - t_i) \dots (t - t_{i+k-1}) g^i(t) \quad \& \quad g^i(t) = (t - t_{i+k}) h^i(t),$$

z $g^i, h^i : [t_i, t_{i+k}] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad C^1 \ \& \ C^0$. Również z Lematu Hadamard'a

$$h^i = O\left(\frac{d^{k+1} f^i}{dt^{k+1}}\right) = O(1),$$

tak więc $g^i = O(\delta)$, i

$$\dot{g}^i = O\left(\frac{d^{k+1} f^i}{dt^{k+1}}\right) = O(1).$$

$$\boxed{f^i = O(\delta^{k+1}), \quad \dot{f}^i = O(\delta^k).} \quad (39)$$

Niech $v(t)$ będzie **projekcją** \dot{f} na $\dot{\gamma}(t)^\perp$. Ponieważ $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$

$$\dot{f}^i(t) = \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t) + v(t),$$

& $v(t) = O(\delta^k)$ z (39). Tak więc dla $\hat{\gamma}_k^i$ **przeparametryzowanej** jako $\tilde{\gamma}_k^i = \hat{\gamma}_k^i \circ \psi_k^i$:

$$\dot{\tilde{\gamma}}_k^i(t) = (1 + \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle) \dot{\gamma}(t) + v(t),$$

i skoro $\langle \dot{\gamma}(t), v(t) \rangle = 0$, $\|\dot{\gamma}\| = 1$ & $(1 + \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle)^{-2} \|v(t)\|^2 > -1 + \varepsilon$:

$$\boxed{\|\dot{\tilde{\gamma}}_k^i(t)\| - \|\dot{\gamma}(t)\| = \langle \dot{f}^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + O(\delta^{2k}).} \quad (40)$$

Z $f^i(t_i) = f^i(t_{i+k}) = \vec{0}$ i całkowania przez części (39) & (40):

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+k}} (\|\tilde{\gamma}_k^i(t)\| - \|\dot{\gamma}(t)\|) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+k}} \langle f^i(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\delta^{2k+1}) \\ &= - \int_{t_i}^{t_{i+k}} \langle f(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\delta^{2k+1}) \\ &= O(\delta^{k+2}) . \end{aligned}$$

Dlatego, na $T_i = [t_i, t_{i+k}]$ jako że $d(\hat{\gamma}_k^i) = d(\tilde{\gamma}_k^i)$ ($\psi_k^i > 0$):

$$\boxed{d(\hat{\gamma}_k^i) - d(\gamma_i) = O(\delta^{k+2}) ,}$$

gdzie $d(\gamma_i) = \int_{t_i}^{t_{i+k}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

Stąd jako że $m\delta = O(1)$

$$\boxed{d(\hat{\gamma}_k) - d(\gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} (d(\hat{\gamma}_k^i) - d(\gamma_i)) = O(\delta^{k+1}) .}$$

Dla $\gamma \in C^4$, $k = 2$, i $t_{i+2} - 2t_{i+1} + t_i = O(\delta^{1+\varepsilon})$:

Tak więc $h^i = O(1)$ i $\dot{h}^i = O(1)$ (jako, że $h^i \in C^1$). Z Tw. Taylor'a dla $r^i(t) = \langle h^i(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle$ w punkcie $t = t_i$

$$\langle h^i(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = a_i + O(\delta),$$

gdzie $a_i = \langle h^i(t_i), \ddot{\gamma}(t_i) \rangle = O(1)$. Stąd

$$\langle f^i(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = a_i(t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) + O(\delta^4).$$

Więc

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+2}} (t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) dt &= \frac{1}{12}(t_i - t_{i+2})^3(t_{i+2} - 2t_{i+1} + t_i) \\ &= O(\delta^{4+\varepsilon}), \end{aligned}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} (\|\ddot{\tilde{\gamma}}^i(t)\| - \|\ddot{\gamma}(t)\|) dt = O(\delta^{4+\varepsilon}).$$

Jako, że $m\delta = O(1)$ **dowód Tw. 5** jest zakończony.

12. Lemat Pomocniczy

Lemat 11. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie C^l , gdzie $l \geq 1$ i $f(t_0) = \mathbf{0}$, dla pewnego $t_0 \in (a, b)$. Wtedy istnieje funkcja klasy C^{l-1} $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $f(t) = (t - t_0)g(t)$ i $g = O(f')$.

Dla f_i -ej komponenty $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ niech $F_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie $F_i(u) = f_i(tu + (1-u)t_0)$. Z fundamentalnego tw. rachunku całkowego

$$f_i(t) = F_i(1) - F_i(0) = (t - t_0) \int_0^1 f_i'(tu + (1-u)t_0) du .$$

weźmy $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, gdzie

$$g_i(t) = \int_0^1 f_i'(tu + (1-u)t_0) du .$$

13. 4PQ - Konstrukcja i Asymptotyka

$\gamma \in C^4$ ściśle wypukła ($\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) > 0$ lub < 0) i próbkowana mniej lub bardziej równomiernie.

Dla $Q^{i,4} = (q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3})$ niech $Q^i : [0, \beta_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie **krzywą kwadratową**

$$Q^i(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2,$$

dla $s \in [0, \beta_i]$, taką, że

$$Q^i(0) = q_i, \quad Q^i(1) = q_{i+1}, \quad Q^i(\alpha_i) = q_{i+2}, \quad Q^i(\beta_i) = q_{i+3}, \quad (41)$$

z

$$1 < \alpha_i < \beta_i. \quad (42)$$

Pytanie: jakie są formuły na interpolanta Q^i i parametry α_i i β_i ?

Pomijamy indeks i w notacji. (41) $\Rightarrow a_0 = q_0$ i $a_2 = q_{i+1} - a_0 - a_1$.

Dla $(p_1, p_\alpha, p_\beta) = (q_{i+1} - q_i, q_{i+2} - q_i, q_{i+3} - q_i)$ (41) \Rightarrow

$$\boxed{a_1\alpha + (p_1 - a_1)\alpha^2 = p_\alpha, \quad a_1\beta + (p_1 - a_1)\beta^2 = p_\beta,} \quad (43)$$

z 4 niewiadomymi $(a_1^1, a_1^2, \alpha, \beta)$ (układ 4 równań kwadratowych).

Lemat 12: Dla $\gamma \in C^3$ w \mathbb{R}^2 próbkowanej mniej lub bardziej równomiernie rozwiązanie (43) i (42) jest następujące:

$$a_1 = \frac{p_\alpha - \alpha^2 p_1}{\alpha - \alpha^2} = \frac{p_\beta - \beta^2 p_1}{\beta - \beta^2}, \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\alpha p_1 - p_\alpha}{\alpha - \alpha^2} = \frac{\beta p_1 - p_\beta}{\beta - \beta^2},$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{\frac{e}{d}(1 + d - e)}}{e - d}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{\frac{d}{e}(1 + d - e)}}{e - d},$$

gdzie $c = -\det(p_\alpha, p_\beta)$, $d = -\det(p_\beta, p_1)/c$ i $e = -\det(p_\alpha, p_1)/c$.

Rozważmy wektory prostopadłe do p_β i p_α :

$$p_\beta^\perp = (-p_{\beta 2}, p_{\beta 1}), \quad p_\alpha^\perp = (-p_{\alpha 2}, p_{\alpha 1}).$$

Biorąc iloczyn skalarny (43) najpierw z p_β^\perp a potem z $p_\alpha^\perp \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \alpha\beta(\alpha - \beta) \langle p_1 | p_\beta^\perp \rangle &= (\beta - \beta^2) \langle p_\alpha | p_\beta^\perp \rangle, \\ \alpha\beta(\alpha - \beta) \langle p_1 | p_\alpha^\perp \rangle &= -(\alpha - \alpha^2) \langle p_\beta | p_\alpha^\perp \rangle. \end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$ i asymptotycznie $\langle p_\alpha | p_\beta^\perp \rangle \neq 0$ i $\langle p_\beta | p_\alpha^\perp \rangle \neq 0$ (jako, że γ ściśle wypukła) mamy

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha - \beta) \langle p_1 | p_\beta^\perp \rangle}{\langle p_\alpha | p_\beta^\perp \rangle} &= (1 - \beta), \\ \frac{\beta(\alpha - \beta) \langle p_1 | p_\alpha^\perp \rangle}{\langle p_\beta | p_\alpha^\perp \rangle} &= -(1 - \alpha). \end{aligned}$$

(44)

Asymptotycznie $c \neq 0$. Stąd mamy również:

$$c = - \langle p_\beta | p_\alpha^\perp \rangle = \langle p_\alpha | p_\beta^\perp \rangle . \quad (45)$$

Podobnie

$$d = \frac{- \langle p_1 | p_\beta^\perp \rangle}{c} \quad \text{i} \quad e = \frac{- \langle p_1 | p_\alpha^\perp \rangle}{c} .$$

Kombinując 2 ostatnie formuły z (45) \Rightarrow

$$d = \frac{- \langle p_1 | p_\beta^\perp \rangle}{\langle p_\alpha | p_\beta^\perp \rangle} \quad \text{i} \quad e = \frac{\langle p_1 | p_\alpha^\perp \rangle}{\langle p_\beta | p_\alpha^\perp \rangle} ,$$

które po podstawieniu do (44) \Rightarrow

$$\alpha(\alpha - \beta)d = \beta - 1 \quad \beta(\alpha - \beta)e = \alpha - 1 . \quad (46)$$

1sze równanie (46) daje:

$$\alpha^2 d + 1 = \beta(1 + d\alpha) . \quad (47)$$

$(1 + d\alpha) \neq 0$ bo inaczej skoro $\alpha \neq 0$ mielibyśmy $d = -\alpha^{-1}$ i z (47) $\alpha^2 d + 1$ znikałaby co z $d = -\alpha^{-1}$ dawałoby $\alpha = 1$, *sprzeczność*.

Stąd i z (47)

$$\beta = \frac{\alpha^2 d + 1}{1 + d\alpha} . \quad (48)$$

Podstawiając (48) do 2giego równania (46) \Rightarrow

$$\frac{\alpha^2 d + 1}{(1 + d\alpha)^2} (\alpha + d\alpha^2 - \alpha^2 d - 1)e = \alpha - 1 .$$

Skoro $\alpha \neq 1$ otrzymujemy:

$$\boxed{(d^2 - de)\alpha^2 + 2d\alpha + 1 - e = 0 ,} \quad (49)$$

równanie kwadratowe. Udowodnimy, że

$$\Delta = 4de(1 + d - e) > 0 \quad (50)$$

asymptotycznie. Przypomnijmy, iż

$$d = \frac{\det(p_\beta, p_1)}{\det(p_\alpha, p_\beta)} \quad \text{i} \quad e = \frac{\det(p_\alpha, p_1)}{\det(p_\alpha, p_\beta)} . \quad (51)$$

Ponieważ $\det(v, w) = \|v\| \|w\| \sin(\sigma)$ (σ zorientowany kąt między v i w) dla ściśle wypukłej γ obie wielkości $e < 0$ i $d < 0$ (ujemne).

By pokazać (50) wystarczy udowodnić iż $1 + d - e > 0$ (de facto wszystkie nierówności są oddzielone od zera).

Z Tw. Taylor'a

$$\gamma(t) = \gamma(t_i) + \dot{\gamma}(t_i)(t - t_i) + (1/2)\ddot{\gamma}(t_i)(t - t_i)^2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right)$$

i mamy dalej (korzystamy z faktu, iż $0 < T < \infty$ i $\gamma \in C^4/C^3$)

$$p_1 = \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + (1/2)\ddot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

$$p_\alpha = \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+2} - t_i) + (1/2)\ddot{\gamma}(t_i)(t_{i+2} - t_i)^2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

$$p_\beta = \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+3} - t_i) + (1/2)\ddot{\gamma}(t_i)(t_{i+3} - t_i)^2 + O\left(\frac{1}{m^3}\right).$$

Stąd i z (51) po skróceniu:

$$1 + d - e = \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_i)(t_{i+2} - t_i)} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Próbkowanie mniej lub bardziej równomierne $\Rightarrow \frac{K_l}{m} \leq t_{i+1} - t_i \leq \frac{K_u}{m}$:

$$0 < \frac{K_l^2}{3K_u^2} \leq \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_i)(t_{i+2} - t_i)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (52)$$

Formuły (50) i (52) $\Rightarrow \boxed{\Delta > 0}$.

Dla (49) pokażemy że współczynnik z α^2 tj. $d^2 - ed = d(d - e) \neq 0$.

Skoro $d - e = (\det(p_\alpha - p_\beta, p_1)/c)$ i γ ściśle wypukła, geometryczny argument daje $d \neq 0$ i $(d - e) \neq 0$, asymptotycznie. Tak więc

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{e}{d}(1 + d - e)}}{e - d}$$

jest rozwiązaniem. Tak więc z (48) mamy

$$\beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{d}{e}(1 + d - e)}}{e - d}.$$

Dla krzywizny $k(\gamma(t)) = \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) < 0$ (lub $k(\gamma(t)) > 0$) para (α_+, β_+) spełnia

$$1 < \alpha < \beta. \quad (53)$$

By pokazać (53) korzystamy z tego, że próbkowanie jest mniej lub bardziej równomierne i że γ jest ściśle wypukła:

$$\begin{aligned}
c &= k(\gamma(t_i)) \cdot (t_{i+3} - t_{i+2})(t_{i+1} - t_{i+3})(t_{i+2} - t_{i+3}) + O\left(\frac{1}{m^4}\right), \\
d &= \frac{-(t_{i+1} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+1})}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+2})} + O\left(\frac{1}{m}\right), \\
e &= \frac{-(t_{i+1} - t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_i)(t_{i+3} - t_{i+2})} + O\left(\frac{1}{m}\right), \\
\frac{e}{d} &= \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})(t_{i+2} - t_i)}{(t_{i+3} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_i)} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{54}
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{e}{d}(1 + d - e) &= \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^2}{(t_{i+3} - t_i)^2} + O\left(\frac{1}{m}\right), \\
e - d &= 1 - \frac{(t_{i+2} - t_{i+1})(t_{i+3} - t_{i+1})}{(t_{i+3} - t_i)(t_{i+2} - t_i)} + O\left(\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Dalej po skróceniu

$$\alpha_+ = 1 + \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \beta_+ = 1 + \frac{t_{i+3} - t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Skoro próbkowanie mniej lub bardziej równomierne to $1 < \alpha_+ < \beta_+$.

Po wyliczeniu α i β mamy:

$$a_1 = \frac{p_\alpha - \alpha^2 p_1}{\alpha - \alpha^2} = \frac{p_\beta - \beta^2 p_1}{\beta - \beta^2}, \quad a_2 = \frac{\alpha p_1 - p_\alpha}{\alpha - \alpha^2} = \frac{\beta p_1 - p_\beta}{\beta - \beta^2}.$$

Aby udowodnić asymptotykę z **Tw. 4** trzeba zbadać rozwinięcie Taylor'a γ do rzędu 4. Dla

$$l(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{k(\gamma(t))}$$

Lemat 13.

$$\alpha_+ = \frac{(t_{i+2} - t_i) \left(1 + \frac{l(t_i)(t_{i+2} - t_{i+1})}{6}\right)}{t_{i+1} - t_i} + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\beta_+ = \frac{(t_{i+3} - t_i) \left(1 + \frac{l(t_i)(t_{i+3} - t_{i+1})}{6}\right)}{t_{i+1} - t_i} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

(55)

Z (55) (**Lemat 13** także $\Rightarrow 1 < \alpha_+ < \beta_+$) mamy:

Lemat 14.

$$\begin{aligned}
a_1 &= (t_{i+1} - t_i) \dot{\gamma}(t_i) \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \\
a_2 &= \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \ddot{\gamma}(t_i) \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) + \dot{\gamma}(t_i) O\left(\frac{1}{m^2}\right) + O\left(\frac{1}{m^3}\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

Z Lematu 14, dla $s \in [0, \beta_i]$:

$$\boxed{\frac{dQ^i}{ds} = O\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{i} \quad \frac{d^2Q^i}{ds^2} = O\left(\frac{1}{m^2}\right).} \tag{57}$$

Dla wielomianu Lagrange'a $\psi^i : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow [0, \beta_i]$ z

$$\psi^i(t_i) = 0 \quad \psi^i(t_{i+1}) = 1 \quad \psi^i(t_{i+2}) = \alpha_i \quad \psi^i(t_{i+3}) = \beta_i$$

z Lematu 12 mamy

$$\boxed{\frac{d^k \psi^i}{dt^k} = O(m) \quad \text{for } k = 1, 2, 3.} \tag{58}$$

Więc ψ jest dyfeomorfizmem. Niech

$$\tilde{\gamma}_i = Q^i \circ \psi^i : [t_i, t_{i+3}] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$\tilde{\gamma}_i$ określa wielomian stopnia nie większego niż 6.

(57), (58) i Tw. o różniczkowaniu funkcji złożonej \Rightarrow

$$\frac{d^k \tilde{\gamma}_i}{dt^k} = O(1) \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, 4. \quad (59)$$

Z warunków interpolacyjnych, funkcja $f = \tilde{\gamma}_i - \gamma$ spełnia

$$f(t_i) = f(t_{i+1}) = f(t_{i+2}) = f(t_{i+3}).$$

Z Lematu Hadamard'a (jako że $f \in C^4$) i z (59)

$$f(t) = (t - t_i)(t - t_{i+1})(t - t_{i+2})(t - t_{i+3})h(t) \quad (60)$$

z $h = O(1)$. Więc

$$\boxed{\dot{f} = O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad \text{i} \quad f = O\left(\frac{1}{m^4}\right).} \quad (61)$$

Estymacja krzywej γ przez 4PQ jest więc 4 rzędu.

Niech $v(t)$ oznacza projekcję \dot{f} na prostą prostopadłą do $\dot{\gamma}(t)$. Wtedy

$$\ddot{\tilde{\gamma}}_e^i(t) = \left\langle \ddot{\tilde{\gamma}}_e^i(t) \left| \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right. \right\rangle \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} + v(t). \quad (62)$$

Ponieważ $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ (jako, że γ regularna) i z $\ddot{\gamma}_e^i = \dot{f} + \dot{\gamma}$, (62) mamy

$$v(t) = \dot{f}(t) - \langle \dot{f}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle \dot{\gamma}(t). \quad (63)$$

Stąd z (61) jako, że $\dot{f} = O(\frac{1}{m^3})$ mamy $v = O(\frac{1}{m^3})$. To ostatnie z

$$\ddot{\gamma}_e^i(t) = (1 + \langle \dot{f}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle) \dot{\gamma}(t) + v(t)$$

i z $\langle \dot{\gamma} | \dot{v} \rangle = 0$ i z Tw. Taylor'a \Rightarrow

$$\|\ddot{\gamma}(t)\| = (1 + \langle \dot{f}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle) \|\dot{\gamma}(t)\| + O(\frac{1}{m^6}).$$

Ostatnia formuła z $f = O(\frac{1}{m^4})$ i całkowanie przez części (jako, że $f(t_i) = f(t_{i+3}) = 0$)
 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+3}} \|\ddot{\gamma}(t)\| - \|\dot{\gamma}(t)\| dt &= \int_{t_i}^{t_{i+3}} \langle \dot{f}(t) | \dot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\frac{1}{m^7}) \\ &= - \int_{t_i}^{t_{i+3}} \langle f(t) | \ddot{\gamma}(t) \rangle dt + O(\frac{1}{m^7}) \\ &= O(\frac{1}{m^5}). \end{aligned} \quad (64)$$

Po zsumowaniu po wszystkich segmentach $[t_i, t_{i+3}]$ otrzymujemy iż **długość** $d(\gamma)$ **szacowana jest przez 4PQ z 4tym rzędem zbieżności** Dowód **Tw. 4** jest zakończony.

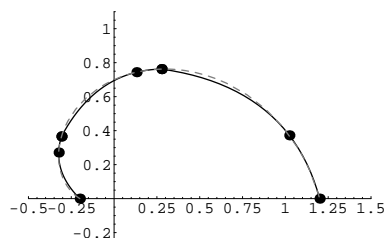
14. Parametryzacja Wykładnicza

Uogólnieniem **SPDC** jest parametryzacja **wykładnicza (SPWe)**:

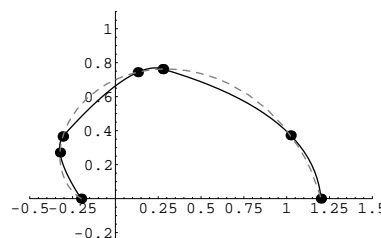
$$\hat{t}_0 = 0, \quad \hat{t}_{i+1} = \hat{t}_i + \|q_{i+1} - q_i\|^e, \quad 0 \leq e \leq 1, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Dla $e = 1$ **SPW1=SPDC**, $e = 0,5$ **SPW0.5** nazywa się **centripetal**

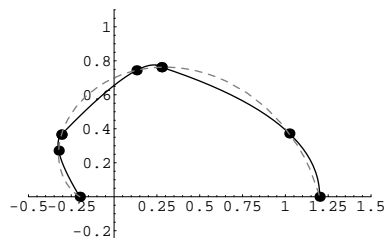
i dla $e = 0$ **SPW0** $\Rightarrow \hat{t}_i = i.$



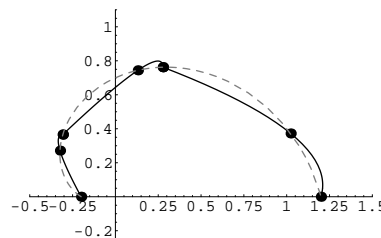
a)



b)



c)



d)

Rys. 17. IN z SPWe z $r = 2$, γ_{sp} próbkowanie (8) z $\varepsilon = 0$: a) $e = 1$ b) $e = 0.5$ c) $e = 0.33$ d) $e = 0$.

Próbkowanie (8) jest 0-równomierne.

i) Przypomnienie: dla próbkowań ε -równomiernych:

$$\boxed{\mathbf{e}=0} \text{ (z } \hat{t} = i) \text{ Tw. 3} \Rightarrow \boxed{d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) = O(\delta^{\min\{4, 4\varepsilon\}}).$$

Dla $\varepsilon = 0$ ($\alpha = 0$ w Tw. 3):

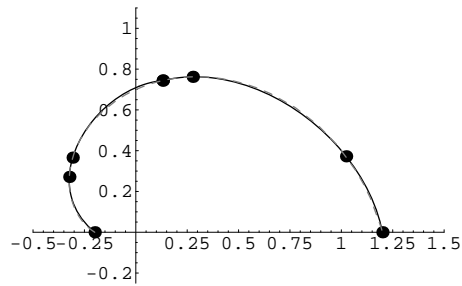
$$\boxed{d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) = O(1).} \text{ (zbieżność-rozbieżność)}$$

ii) Dla dowolnych dopuszczalnych prób. V^δ :

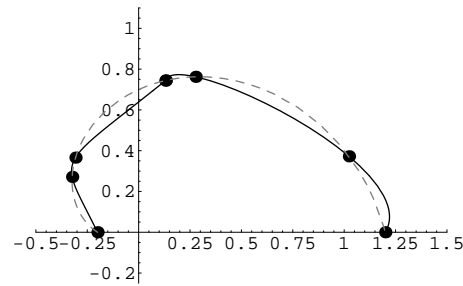
$$\boxed{\mathbf{e}=1} \text{ (czyli SPDC) Tw. 5} \Rightarrow \boxed{d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) = O(\delta^3).$$

Dla $\boxed{0 < \mathbf{e} < 1}$ można oczekiwać: $\boxed{d(\gamma) - d(\hat{\gamma}_{L_m(2)}) = O(\delta^{\alpha(e)})}$.

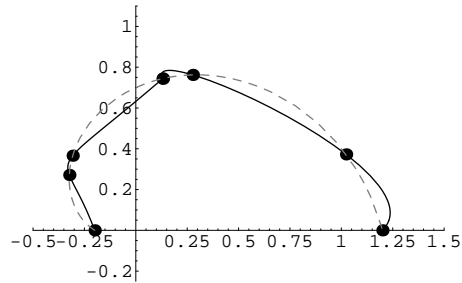
$$\boxed{0 \leq \alpha(e) \leq 3.} \quad ??$$



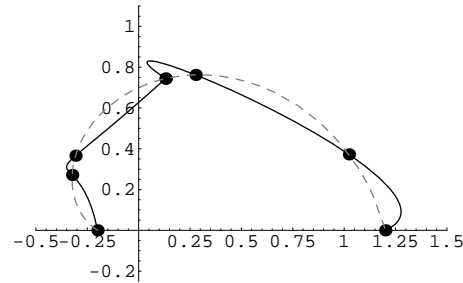
a)



b)



c)



d)

Rys. 18. IN z SPWe z $r = 3$, γ_{sp} próbkowanie (8) z $\varepsilon = 0$: a) $e = 1$ b) $e = 0.5$ c) $e = 0.33$ d) $e = 0$.

$\hat{\gamma}_{L_m(2)}$ z $60 \leq m \leq 100$ dla γ_{sp} (próbkowanie (8) i $\varepsilon = 0$) w $\approx d(\gamma) \Rightarrow$

$\alpha = 3.03$ ($e = 1$) (jak w Tw. 5), $\alpha = 1.99$ ($e = 0.5$) $\alpha = 0.26$ ($e = 0.2$) i rozbieżność ($e = 0$) (jak w Tw. 3).

$\hat{\gamma}_{L_m(3)}$ z $75 \leq m \leq 165$ dla γ_{sp} (próbkowanie (8) i $\varepsilon = 0$) w $\approx d(\gamma) \Rightarrow$

$\alpha = 3.96$ ($e = 1$) (jak w Tw. 5), $\alpha = 2.45$ ($e = 0.5$) rozbieżność ($e = 0.2$) i rozbieżność ($e = 0$).