Funkcja falowa fotonu

dr Wilhelm Czapliński

Funkcja falowa fotonu

- **Foton** - A.Einstein, Ann. Phys. 17(1905) 132
- - G.N.Lewis, Nature 118 (1926) 874

- **II. kwantyzacja pola elektromagnetycznego** –

P.A.M.Dirac, Proc. Royal. Soc. (London) **A114** (**1927**) 243

- **równanie Diraca** –

P.A.M. Dirac, Proc. Royal. Soc. (London) **A117** (**1928**) 610
A118 (**1928**) 351

Plan działania

1. Konstrukcja równania falowego dla fotonu
w przestrzeni pędów $\rightarrow$ w przestrzeni „położeń”

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{r},t)$$

2. Dobranie stosownej normalizacji funkcji falowej

$$\psi(\vec{r},t)$$

1. Równanie falowe dla fotonu w przestrzeni pędów

Równania Maxwella
w próżni, w przedstawieniu
położeniowym:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \vec{B} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

W przedstawieniu pędowym (wektora falowego) :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \vec{E}_{\vec{k}}(t)\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \vec{B}_{\vec{k}}(t)\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Pola $\vec{E}(\vec{r},t)$ i $\vec{B}(\vec{r},t)$ są rzeczywiste $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad \vec{E}^{*}_{-\vec{k}} = \vec{E}_{\vec{k}} \qquad \vec{B}^{*}_{-\vec{k}} = \vec{B}_{\vec{k}}$$

- zadane w półprzestrzeni wektora $\vec{k}$

$$\dot{\vec{E}}_{\vec{k}} = ic^2\,\vec{k}\times\vec{B}_{\vec{k}} \qquad \vec{k}\cdot\vec{E}_{\vec{k}} = 0$$

$$\dot{\vec{B}}_{\vec{k}} = -i\,\vec{k}\times\vec{E}_{\vec{k}} \qquad \vec{k}\cdot\vec{B}_{\vec{k}} = 0$$

warunki poprzeczności

Stąd: $\vec{B}_{\vec{k}} = i\omega^{-2}\,\vec{k}\times\dot{\vec{E}}_{\vec{k}} \qquad \omega = kc$

$$\ddot{\vec{E}}_{\vec{k}} + \omega^2\vec{E}_{\vec{k}} = 0 \qquad \leftarrow \text{ r. ruchu dla pola } \vec{E}_{\vec{k}}(t)$$

Wprowadźmy: $\vec{f}_{\vec{k}} = \dfrac{1}{2N\sqrt{k}}(\vec{E}_{\vec{k}} + \dfrac{i}{\omega}\dot{\vec{E}}_{\vec{k}})$,

gdzie $\vec{k}\cdot\vec{f}_{\vec{k}} = 0$, $N = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{2\varepsilon_o}}$, $[\vec{f}_{\vec{k}}] = m^{3/2}$

$$\vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}} = \frac{1}{2N\sqrt{k}}(\vec{E}_{\vec{k}} - \frac{i}{\omega}\dot{\vec{E}}_{\vec{k}}) \neq \vec{f}_{\vec{k}} \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad \vec{f}_{\vec{k}}$ zadane w całej przestrzeni wektora $\vec{k}$

Mając $\vec{f}_{\vec{k}}$ i $\vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}}$ znajdujemy

$$\vec{E}_{\vec{k}} = N\sqrt{k}\,(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}})$$

$$\dot{\vec{E}}_{\vec{k}} = -i\omega N\sqrt{k}\,(\vec{f}_{\vec{k}} - \vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}})$$

z równania ruchu dla $\vec{E}_{\vec{k}}$ i war. poprzeczności $\vec{k}\cdot\vec{f}_{\vec{k}} = 0$

$$i\frac{\partial \vec{f}_{\vec{k}}}{\partial t} = \omega\left(1 - \frac{\vec{k}\,\vec{k}\,\cdot}{k^2}\right)\vec{f}_{\vec{k}} \qquad \Big/\ \hbar$$

$$i\hbar\frac{\partial \vec{f}_{\vec{k}}}{\partial t} = \hat{H}_{\vec{k}}\vec{f}_{\vec{k}}$$ ← r. ruchu dla pola $\vec{f}_{\vec{k}}(t)$

$$\vec{k}\cdot\vec{f}_{\vec{k}}(0) = 0$$ ← war. początkowy

gdzie $\hat{H}_{\vec{k}} = \hbar\omega\left(1 - \frac{\vec{k}\,\vec{k}\,\cdot}{k^2}\right)$, $\vec{f}_{\vec{k}}$ -kandydat na funkcję falową fotonu w reprezentacji pędowej

- Energia pola elekromagnetycznego:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3r\left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\hbar\omega\,\vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\cdot\vec{f}_{\vec{k}} =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\cdot\hat{H}_{\vec{k}}\vec{f}_{\vec{k}} = \left\langle \vec{f}_{\vec{k}}\,\middle|\hat{H}_{\vec{k}}\middle|\,\vec{f}_{\vec{k}}\right\rangle$$

- Pęd pola elekromagnetycznego:

$$\vec{P} = \int d^3r\,\frac{\vec{S}}{c} = \int d^3r\,\frac{1}{c\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\hbar\vec{k}\,\vec{f}_{\vec{k}}^{\,*}\cdot\vec{f}_{\vec{k}} = \left\langle \vec{f}_{\vec{k}}\,\middle|\,\hbar\vec{k}\,\middle|\,\vec{f}_{\vec{k}}\right\rangle$$

- Moment pędu pola elekromagnetycznego:

$$\vec{M} = \int d^3 r\, (\vec{r} \times \frac{\vec{S}}{c}) = \int d^3 r \frac{1}{c\mu_0}\left[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})\right] =$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}\, \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*} \cdot \left(\vec{k} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\vec{k}} + \hbar \vec{s} \right) \vec{f}_{\vec{k}} = \left\langle \vec{f}_{\vec{k}} \middle| \hat{J} \middle| \vec{f}_{\vec{k}} \right\rangle$$

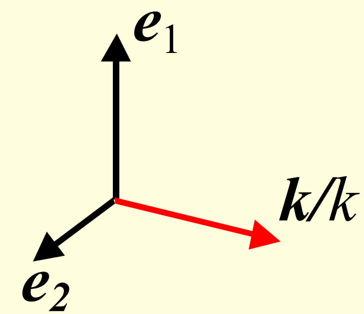
$$\hat{s}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wartości własne: -1, 0, 1

$$\hat{s}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad s = 1$$

Stany własne operatorów $\hat{s}^2$ i $\hat{s}_z$:

$$\chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{\chi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2), \quad \vec{\chi}_0 = \vec{k}/k, \quad \vec{\chi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2),$$

$$\vec{f}_{\vec{k}} = \sum_{\lambda=-1}^{1} f_\lambda(\vec{k})\,\vec{\chi}_\lambda$$

Z warunku poprzeczności $\vec{k}\cdot\vec{f}_{\vec{k}} = 0 \;\rightarrow\; f_0(\vec{k}) = 0$

$$\vec{f}_{\vec{k}} = f_{-1}(\vec{k})\,\vec{\chi}_{-1} + f_1(\vec{k})\,\vec{\chi}_1$$

2. Normalizacja

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \; \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*} \cdot \vec{f}_{\vec{k}} = 1$$

$$\rho_{\vec{k}} = \vec{f}_{\vec{k}}^{\,*} \cdot \vec{f}_{\vec{k}}$$

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia fotonu o pędzie $\hbar\vec{k}$

$\vec{f}_{\vec{k}}$ - funkcja falowa fotonu w przedstawieniu pędowym

Funkcja falowa fotonu w przedstawieniu położeniowym

- Funkcja falowa Landaua i Peierlsa - Z.Phys.62 (1930) 188

$$\vec{\psi}_{LP}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{f}_{\vec{k}} \; e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$[\psi_{LP}] = m^{-3/2} \quad \rightarrow \quad \int d^3r \left| \vec{\psi}_{LP}(\vec{r},t) \right|^2 = 1$$

$$\vec{E}_{\vec{k}} = N\sqrt{k}\,(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}}) \;\rightarrow\; \vec{E}(\vec{r},t) = N\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k}\,(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{\psi}_{LP}(\vec{r},t) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{-\Delta}}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \pi(2\pi)^{-5/2}\int \frac{d^3r'}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}\right|^{5/2}}\,\vec{E}(\vec{r}\,',t)$$

Wady $\psi_{LP}(\vec{r},t)$:

1. Jest obiektem nielokalnym

2. Jej wartość w punkcie ***r*** w jednym układzie odniesienia zależy od wartości w całej przestrzeni w innym układzie

4. Nie transformuje się jak tensor

4. **Nie da się dla niej wyprowadzić r. ciągłości**

- Funkcja falowa fotonu w/g I.Białynickiego-Biruli

- Acta Phys. Polon. 86 (1994) 97

$$\vec{E}(\vec{r},t) = N\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k}\,(\vec{f}_{\vec{k}} + \vec{f}^{\,*}_{-\vec{k}})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k}\,\vec{f}_{\vec{k}}\;e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}$$ - lokalnie zależy od pola $\vec{E}$

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \underbrace{\sqrt{\varepsilon_o}\,N}_{\sqrt{\hbar c/2}}\;\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{k}\,\vec{f}_{\vec{k}}\;e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad [\vec{\psi}] = \sqrt{J/m^3}$$

Równanie falowe dla fotonu w przedstawieniu położeniowym

$$i\hbar \frac{\partial \vec{f}_{\vec{k}}}{\partial t} = \hat{H}_{\vec{k}} \vec{f}_{\vec{k}} = \hbar\omega \left(1 - \frac{\vec{k}\,\vec{k}\cdot}{k^2} \right) \vec{f}_{\vec{k}} = \hbar\omega\, \vec{f}_{\vec{k}}$$

$$\vec{f}_{\vec{k},\lambda} = f_\lambda(\vec{k})\, \vec{\chi}_\lambda \qquad \lambda = +1, -1$$

$$i\vec{k} \times \vec{f}_{\vec{k},\lambda} = (-1)^\lambda \vec{f}_{\vec{k},\lambda}$$

$$\nabla \times \vec{a}(\vec{r}) = -i(\vec{s} \cdot \nabla)\, \vec{a}(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t) = \sqrt{\hbar c/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k}\, i\vec{k} \times \vec{f}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (-1)^\lambda i \frac{\partial}{\partial t} \vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t) = (-1)^\lambda c(\vec{s} \cdot \underbrace{\hbar/i\nabla}_{\hat{p}})\, \vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t)$$

Należy uwzględnić obie polaryzacje fotonu $\rightarrow$ tworzymy funkcję

$$\Psi = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_{+1} \\ \vec{\psi}_{-1} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi}_{+1} \\ \vec{\psi}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_{+1} \\ -\vec{\psi}_{-1} \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = c \boldsymbol{\sigma}_3 (\vec{s} \cdot \hat{p}) \Psi$$

$$c \boldsymbol{\sigma}_3 (\vec{s} \cdot \hat{p}) = \hat{H}$$ - Hamiltonian fotonu

Dla porównania - r. Diraca (w reprezentacji chiralnej)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = c \boldsymbol{\sigma}_3 (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \Psi + mc^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \Psi$$

Dygresja

Wektor Riemanna-Silbersteina (R-S)

Tworzymy z pól $\vec{E},\ \vec{B}$ zespolony wektor:

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \frac{\sqrt{\varepsilon_o}}{2}\left(\vec{E}(\vec{r},t) + ic\,\vec{B}(\vec{r},t)\right)$$

Równania Maxwella przyjmują postać:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{F}(\vec{r},t) = c(\vec{s}\cdot\hat{p})\,\vec{F}(\vec{r},t)$$

$$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r},t) = 0$$

Normalizacja funkcji Ψ

Wychodzimy z normalizacji w przestrzeni pędów:

$$1 = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \; \vec{f}^{\,*}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{f}_{\vec{k}\lambda} = \langle \Psi | \Psi \rangle \qquad (*)$$

$$\vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t) = \sqrt{\hbar c/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k}\, \vec{f}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

odwrotna transf. Fouriera: $\vec{f}_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\dfrac{2}{\hbar c}} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \displaystyle\int d^3r\, \vec{\psi}_\lambda(\vec{r},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

wstawiamy do (*): $\langle \Psi | \Psi \rangle = \displaystyle\int d^3r\, \Psi^+ \frac{1}{\hat{H}} \Psi$

ogólnie, iloczyn skalarny $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \displaystyle\int d^3r\, \Psi_1^+ \frac{1}{\hat{H}} \Psi_2$

Interpretacja statystyczna

$$[\Psi] = \sqrt{J/m^3}\ ,\ \langle E \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int d^3 r\, \Psi^+ \frac{1}{\hat{H}} \hat{H} \Psi = \int d^3 r\ \Psi^+ \Psi$$

$$\rho_E(\vec{r},t) = \frac{\Psi^+(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)}{\langle E \rangle}\ , \qquad [\rho_E] = 1/m^3$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\Psi^+(\vec{r},t)\sigma_3 \vec{s}\,\Psi(\vec{r},t)}{\langle E \rangle}\ , \quad [\vec{j}] = 1/(s\,m^2)$$

Spełnione jest r. ciągłości (prawo zachowania):

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_E(\vec{r},t) = 0$$

ρ_E -gęstość prawdop. znalezienia ENERGII fotonu

$(\vec{r},t)$

w p-cie

Podsumowanie

1. Równanie falowe dla fotonu w przedstawieniu pędowym

- $$i\hbar \frac{\partial \vec{f}_{\vec{k},\lambda}}{\partial t} = \hbar\omega \left(1 - \frac{\vec{k}\,\vec{k}\,\cdot}{k^2}\right) \vec{f}_{\vec{k},\lambda} \quad , \qquad \lambda = +1, -1$$

2. Równanie falowe dla fotonu w przedst. położeniowym

- $$\Psi(\vec{r},t) = \sqrt{\hbar c/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k} \begin{pmatrix} \vec{f}_{\vec{k},1} \\ \vec{f}_{\vec{k},-1} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
- $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = c\sigma_3 (\vec{s}\cdot\hat{p})\Psi$$
- $$\rho_E(\vec{r},t) = \frac{\Psi^{+}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)}{\langle E \rangle}$$ - gęstość prawdop. znalezienia ENERGII fotonu w p-cie $(\vec{r},t)$

Literatura

1. Akhiezer, Berestetskii, „Kvantiovaja elektrodinamika”
3. I. Białynicki-Birula. Acta. Phys. Polon. A 86 (1997) 97
4. I. Białynicki-Birula. Progress in Optics XXXVI (1996) 245
5. R.H. Good, Phys. Rev. 105 (1957) 1914
5. J.E. Sipe, Phys. Rev. A 52 (1995) 1875