Dynamika relatywistyczna dla układów o zmiennej masie

Janusz Wolny
AGH w Krakowie

współpraca:
Radosław Strzałka

Cel:

Wyprowadzenie równania dynamiki zapisanego dla układów relatywistycznych o zmieniającej się masie w ruchu, bez korzystania z założeń STW dotyczących stałości prędkości światła w próżni oraz bez użycia czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Równoważność masy i energii

Rezygnując z postulatu o stałości prędkości światła w próżni musimy go zamienić innym, równie fundamentalny postulatem jak ten z STW.

Jednym z możliwych wyborów, i to bardzo dobrze udokumentowanym eksperymentalnie, jest postulat o równoważności masy i energii.

Spróbujmy zatem zamienić postulat stałości prędkości światła na równoważność masy i energii, i zarazem zrezygnujmy z opisu w czterowymiarowej czasoprzestrzeni, nazywanej też przestrzenią Minkowskiego.

Równanie Mieszczerskiego

Klasyczne równanie dynamiki układu o zmiennej masie:

- w zapisie pędowym $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} + \mathbf{u})$$

(np. W. Rubinowicz, W. Królikowski, Mechanika teoretyczna, PWN Warszawa 1998)

- dla przyspieszenia $$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} + \underbrace{\mu\,\mathbf{u}}_{\textit{siła ciągu}}$$ (równanie rakiety, Mieszczerskiego)

gdzie:

- m – chwilowa masa ciała (np. rakiety),
- $\mathbf{v}$ – wektor prędkości ciała,
- $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ wektor przyspieszenia ciała,
- $\mathbf{F}$ – wektor siły zewnętrznej działającej na ciało,
- $\mu \equiv \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ – zmiana masy ciała w chwili czasowej t,
- $\mathbf{u}$ – wektor prędkości wyrzucanej masy dm (np. prędkość spalin względem rakiety; $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ jest prędkością spalin względem LAB)
- t – czas (parametr trajektorii).

Równanie Ciołkowskiego

Rozwiązując równanie dla $F = 0$, oraz stałej szybkości spalania masy paliwa i stałej szybkości wyrzutu spalin (tj. zakładając $\mu = \text{const.}$ i $u = \text{const.}$) otrzymujemy klasyczne równanie Ciołkowskiego dla zmiennej w czasie prędkości rakiety:

$$v = u \cdot \ln \left[m_0 \,/\, \underbrace{(m_0 - \mu t)}_{m(t)} \right]$$

$$v = u \cdot \ln \left[m_0 \,/\, m \right]$$

Dwa przykłady zadań dla układów o zmiennej masie

Przykład 1. Barka pod działaniem stałej siły *F*, na którą sypie się piasek z góry:

równanie ruchu: $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} + \mathbf{u})$$

$v + u = 0$, μ spoczywa w LAB!

rozwiązanie: $$v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} \rightarrow \frac{F}{\mu}$$

Przykład 2. Barka pod działaniem stałej siły *F*, z której wysypuje się piasek do wody:

równanie ruchu: $$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} + \mu\,\mathbf{u}$$

$u = 0$, μ porusza się w LAB!

rozwiązanie: $$v = \frac{F}{\mu}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) \rightarrow \infty$$

Można zamiast piasku użyć wody – nabieranie lub pozbywanie się wody.

Dla cząstki o stałej masie spoczynkowej:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

tj. efektem poruszania się cząstki o masie *m* jest przyrost jej energii (a tym samym masy w ruchu). Wirtualny przyrost masy d*m* „powstaje” w układzie LAB. W tym układzie prędkość dla wirtualnego przyrostu masy wynosi zero. Oznacza to tyle, że cząstka w ruchu nadal pozostanie tą samą cząstką o właściwej sobie masie spoczynkowej, chociaż jej masa w ruchu ulega zmianie („proton w ruchu jest nadal tym samym protonem”).

Wtedy i tylko wtedy:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$$

lub dla prędkości: $$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}$$

J. Wolny, R. Strzalka, *Momentum in the dynamics of variable-mass systems: classical and relativistic case*, Acta Physica Polonica A, **135** (2019) 475-479. arxiv:1810.03609 – 10.2018

Założenia dla nowego podejścia (!!!)

Na podstawie wyników wielu eksperymentów przyjmujemy założenie o równoważności masy i energii. Dla ruchu ciała w próżni wyraża to słynny wzór Einsteina zapisany w postaci:

(1) $$E = m\alpha$$ (proporcjonalność masy i energii, gdzie stała proporcjonalności ma wymiar kwadratu prędkości, dla próżni $\alpha = c^2$)

(2) $$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}$$ (równanie ruchu układu o zmiennej masie, ale stałej masie spoczynkowej, równoważne równaniu d**p**/dt = **F**)

Moc przekazywana do układu

Zauważmy, że moc przekazywana do układu poruszającego się z prędkością **v** poddanego działaniu siły **F**, wynosi

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \ ,$$

co prowadzi do wyrażenia na zmianę masy:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c^2}\right) = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2}$$

Relatywistyczne równanie dynamiki

Wstawiając wyrażenie na zmianę masy do ogólnego równania ruchu otrzymujemy relatywistyczne równanie dynamiki w postaci:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v} \qquad \text{(!!!)}$$

Powyższe równanie jest w pełni zgodne z STW.

Wniosek:

Klasyczne równanie dynamiki dla układów o zmiennej masie wraz z założeniem o proporcjonalności masy i energii prowadzą do relatywistycznego równania ruchu, identycznego jak w Szczególnej Teorii Względności.

Układ styczno-normalny

Przechodząc na współrzędne równoległe i prostopadłe do prędkości poruszającego się ciała: $\mathbf{v} = (v_{\parallel}, v_{\perp}) = (v, 0)$, oraz $\mathbf{F} = (F_{\parallel}, F_{\perp})$, prawą stronę równanie dynamiki możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v} = \left(F_{\parallel}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), F_{\perp}\right) = \left(\frac{F_{\parallel}}{\gamma^2}, F_{\perp}\right)$$

gdzie γ relatywistycznym czynnikiem Lorentza:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Składową równoległą i prostopadłą równania dynamiki możemy zatem napisać w postaci:

$$ma_{\parallel} = \frac{E}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\parallel}}{\gamma^2}$$

$$ma_{\perp} = F_{\perp}$$

Korzystając z faktu, że $m = E/c^2$, dla składowej równoległej otrzymujemy:

$$\frac{E}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\parallel}}{\gamma^2}$$

Korzystając z wyrażenia na moc, przyrost energii ciała wynosi:

$$\mathrm{d}E = F_{\parallel} v \cdot \mathrm{d}t$$

Równanie powyższe przyjmuje postać:

$$\frac{E\mathrm{d}v}{c^2} = \frac{\mathrm{d}E}{v\gamma^2}$$

Po przekształceniu:

$$\frac{v\mathrm{d}v}{c^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} = \frac{\mathrm{d}E}{E}$$

$$\int_0^v \frac{v\mathrm{d}v}{c^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} = \int_{E_0}^{E} \frac{\mathrm{d}E}{E}$$

Rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe w dwóch obszarach:

Dla prędkości podświetlnych (*v* < *c*):

Całkując powyższe równanie różniczkowe w granicach prędkości od 0 do *v*, oraz w granicach energii od energii spoczynkowej, $E(v=0) \equiv E_0$, do energii w ruchu, $E(v) \equiv E$, dostajemy:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right| = \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Co po przekształceniach daje:

$$E = E_0\gamma = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Niezmiennik energia-pęd

Definiując masę spoczynkową m_0: $E_0 = m_0 c^2$, otrzymujemy wyrażenie na relatywistyczną masę w ruchu:

$$m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Podnosząc do kwadratu powyższe równanie i po przekształceniach otrzymujemy:

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

Po wprowadzeniu energii ($E = mc^2$) i pędu ($p = mv$) oraz przemożeniu przez c^2, niezmiennik relatywistyczny dla energii i pędu przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4} \quad \textbf{(!!!)}$$

Ostatecznie, wstawiając wyrażenie na masę relatywistyczną otrzymujemy wzory na transformację składowych, równoległej i prostopadłej przyspieszenia z układu własnego do układu LAB:

$$a_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{m_0 \gamma^3} = \frac{a_{0\parallel}}{\gamma^3}$$

$$a_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m_0 \gamma^1} = \frac{a_{0\perp}}{\gamma^1}$$

Są to dobrze znane równania STW.

Wniosek:

Wprowadzając założenie o równoważności masy i energii do klasycznego równania dynamiki obiektów o zmiennej masie potrafimy wyprowadzić i potwierdzić wszystkie znane do tej pory równania dynamiki relatywistycznej dla ruchu obiektu w próżni.

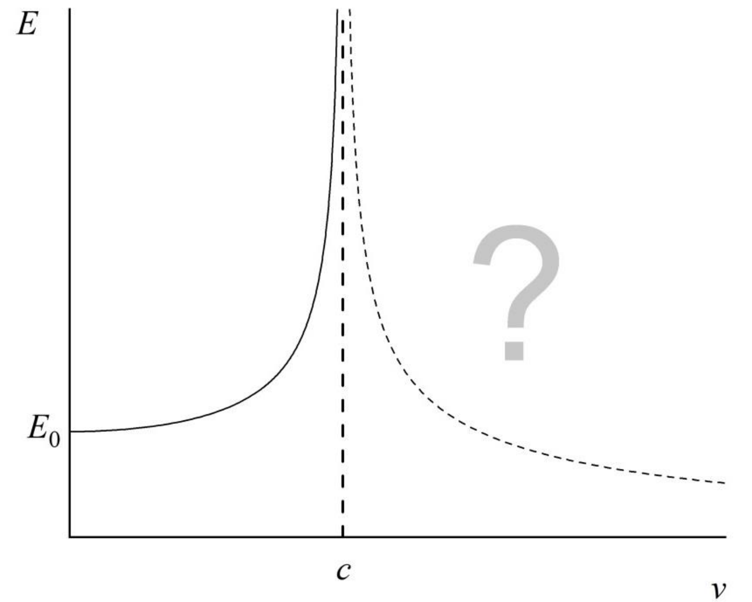
Nie jesteśmy ograniczeni prędkością światła w próżni !!!

Uwaga:
Wyprowadzenie wszystkich równań STW z relacji $m=m_0\gamma$, bez użycia przestrzeni Minkowskiego i bez zakładania stałości prędkości światła:

https://newton-relativity.com/alternative-approach-to-theory-of-relativity/the-book-newton-and-relativity 2019, 2020, 2021

Co z prędkościami nadświetlnymi (*v* > *c*) ?

$$\gamma' \equiv \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1}} \qquad E = E_0\gamma'$$



Dla prędkości hiperrelatywistycznych zachowanie cząstki staje się całkowicie nieklasyczne: wynikiem obniżenia swojej energii jest wzrost prędkości cząstki do nieskończoności (coś w rodzaju gwałtownej ucieczki cząstki z miejsca zdarzenia). Ponieważ brak jest teorii relatywistycznych dla *v*>*c* ewentualne przyjęcie prezentowanego na wykresie rozwiązania wymaga starannej weryfikacji eksperymentalnej.

Wracamy do *v*<*c*

W dalszej części wykorzystamy tożsamość wektorową w euklidesowej przestrzeni 3D:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}$$

Stąd liczymy $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}$ i wstawiamy do relatywistycznego równania ruchu

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v} = \mathbf{F} + \frac{1}{c^2}\left[(\mathbf{v}\times\mathbf{F})\times\mathbf{v} - v^2\mathbf{F}\right]$$

Korzystając z powyższej równości równanie ruchu możemy zapisać w postaci:

$$m\cdot\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \underbrace{\mathbf{F}(1-v^2/c^2)}_{\mathbf{F_r}} + \underbrace{(\mathbf{v}\times\mathbf{F})\times\mathbf{v}/c^2}_{\mathbf{F_p}}$$

Dwa składniki siły: $\mathbf{F_r}$ i $\mathbf{F_p}$

Prawa strona równania ruchu składa się z sumy dwóch sił, $\mathbf{F} = \mathbf{F_r} + \mathbf{F_p}$:

- siły relatywistycznej ($\mathbf{F_r}$), która jest znormalizowaną przez γ siłą klasyczną:

$$\mathbf{F_r} \equiv \mathbf{F}(1\text{-}v^2/c^2) = \mathbf{F}/\gamma^2 \qquad (\text{dla } v = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_r = \mathbf{F})$$

- siły „precesji” ($\mathbf{F_p}$) związanej z ruchem cząstki i wyrażonej wzorem:

$$\mathbf{F}_p \equiv (\mathbf{v}\times\mathbf{F})\times\mathbf{v}/c^2 = \mathbf{F}_\perp v^2/c^2 \qquad (\text{dla } v = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_p = 0)$$

Siła precesji jest prostopadła do **v** i jej <u>moc przekazywana do układu równa się zeru</u>.

Własności składowych F_r i F_p

- Składowa siły F_r jest odpowiednikiem siły klasycznej, i dla małych prędkości ruchu (tj. dla $v \ll c$) staje się wręcz siłą klasyczną.
- Symetria siły precesji, F_p, nie pokrywa się z symetrią siły F. Ostatecznie rozwiązanie zawierające obie składowe, F_r i F_p, może mieć dowolną symetrię, a nawet dopuszczone są rozwiązania chaotyczne.
- Składowa siły precesji, F_p, jest równa zeru dla cząstki spoczywającej, a jej udział w ruchu rośnie wraz z prędkością cząstki, osiągając wartość 100% dla prędkości zbliżających się do c.
- Składnik drugi (F_p) prowadzi do rozwiązań precesyjnych, których udział rośnie wraz z prędkością (np. patrz precesja Merkurego).

Równanie ruchu gdy źródło siły porusza się z prędkością $\mathbf{v_0}$

Dla poruszającego się z prędkością v_0 źródła siły, przekazywana do układu energia wyrażona się wzorem:

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}W + \mathrm{d}W_0 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t - \mathbf{F}\cdot\mathbf{v_0}\mathrm{d}t$$

Wykorzystujemy III Zasadę Dynamiki: siły wzajemnego oddziaływania są przeciwnie skierowane

Co prowadzi do równania ruchu:

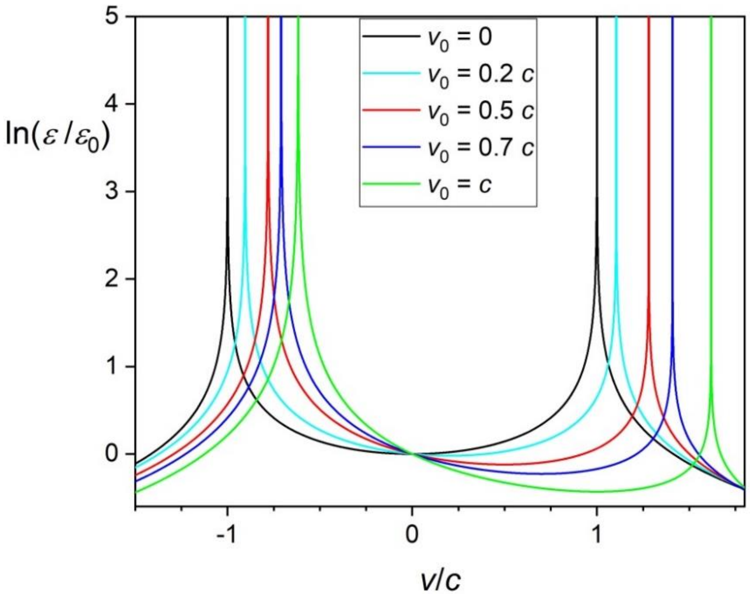
$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{v_0})/c^2)\mathrm{d}\mathbf{v} \qquad \textbf{(!!!)}$$

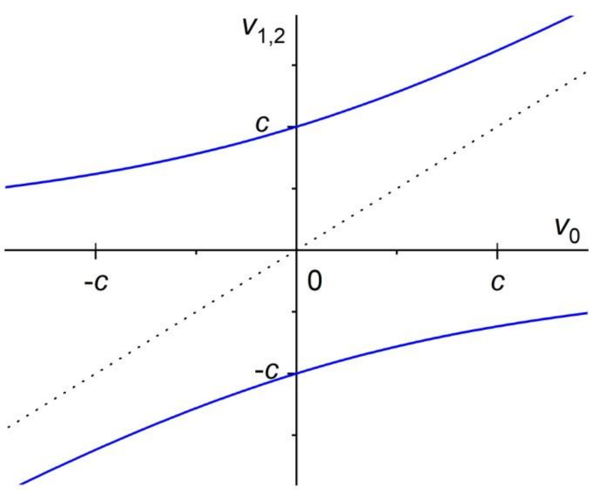
$$\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{c^2}\int_0^v \frac{(v - v_0)dv}{1 - (v - v_0)v/c^2}$$

Dla przypadku jednowymiarowego dostajemy rozwiązanie:

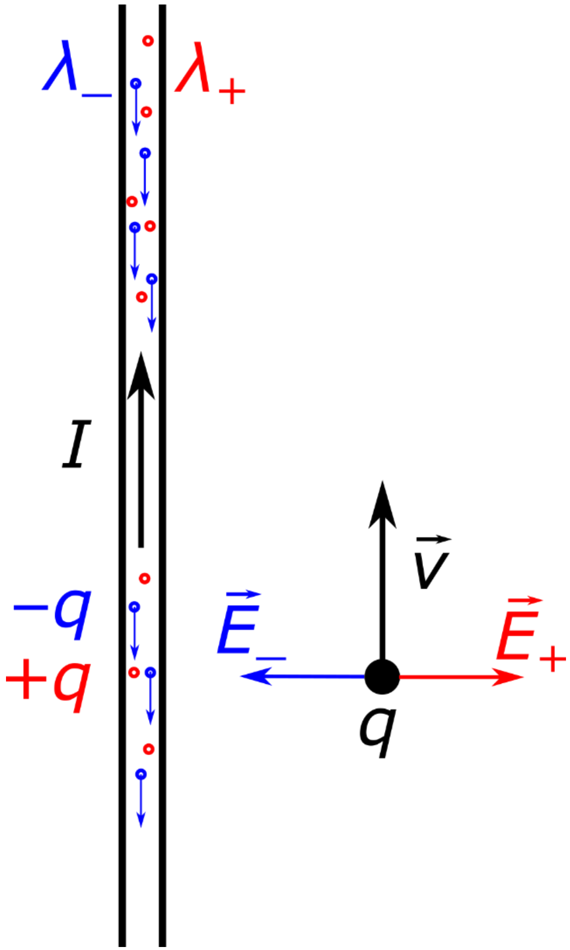
$$\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = A_1 \ln\left|1 - \frac{v}{v_1}\right| + A_2 \ln\left|1 - \frac{v}{v_2}\right| + const$$

Prędkości krytyczne: $v_{1,2} = \frac{1}{2}\left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4c^2}\right)$





Przykład – Wyprowadzenie pola magnetycznego.



Ładunek punktowy q znajduje się w odległości r od prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu I, i porusza się z prędkością **v** równolegle do tego przewodnika,.

W układzie LAB mamy do czynienia zarówno z poruszającymi się źródłami pola siłowego (ruch elektronów swobodnych odpowiedzialny za przepływ prądu elektrycznego, I) jak i ruchem ładunku punktowego, q, z prędkością **v**.

Liniowe gęstości ładunków, λ_+ i λ_-, jak i towarzyszące im pola elektryczne się równoważą: $\lambda_+ + \lambda_- = 0$ oraz $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$.

Siła precesji wyraża się worem:

$$\mathbf{F}_p = -q\, \mathbf{v}\times(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_+ + (\mathbf{v}-\mathbf{v}_-)\times \mathbf{E}_-)/c^2 = q\mathbf{v}\times(\mathbf{v}_-\times\mathbf{E}_-)/c^2$$

Definiujemy pomocniczą wielkość, którą nazywamy wektorem indukcji pola magnetycznego, **B**. Dla rozważanego modelu **B** wyraża się wzorem:

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{v}_- \times \mathbf{E}_-/\mathrm{c}^2$$

i wynosi: $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ (prawo Ampera),

gdzie: $I = \lambda_- v_-$, $E_- = \lambda_-/(2\pi r\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\, \mu_0 \equiv 1/\mathrm{c}^2$

Wartość wektora indukcji pola **B** zależy tylko od składowej prostopadłej pola elektrycznego i wyraża się wzorem:

$$B \equiv v_- /c^2\, E_\perp$$

Ostatecznie siła $\mathbf{F_p}$ wyraża się wzorem:

$$\mathbf{F}_p = q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

i jest nazywana siłą Lorentza dla ładunku punktowego poruszającego się w polu magnetycznym o indukcji **B**.

Podsumowanie

1. Prezentowane podejście do dynamiki relatywistycznej oparte jest na rezygnacji z założenia stałości prędkości światła, oraz przyjęciu dwóch innych założeń:
   - proporcjonalności masy w ruchu do całkowitej energii ciała ($E \sim m$)
   - klasycznego równanie ruchu dla obiektów o zmiennej masie ($\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$)

2. Otrzymane równanie ruchu dla próżni jest identyczne z równaniem STW ($v<c$).

3. Energia ($E = E_0\gamma$) i masa obiektu ($m = m_0\gamma$) wykazują zachowanie osobliwe w otoczeniu prędkości krytycznej c, której kwadrat wartości wynosi: $c^2=\alpha$.

4. Otwarty zostaje nowy rozdział dynamiki obiektów poruszających się z prędkościami nadkrytycznymi ($v>c$).

5. Źródłowemu polu siłowemu poruszających się cząstek towarzyszy zawsze pole wirowe, np. pole magnetyczne, które oddziałuje na poruszające się ładunki za pomocą siły Lorentza.

6. Otwierają się pytania o dynamikę fotonów (energia i masa spoczynkowa fotonu, zachowanie krytyczne, prędkości pod i nadświetlne itp.)

Dodatek 1

Wyprowadzenie wzoru na dodawanie prędkości z wykorzystaniem zasad zachowania (pędu i energii) oraz relatywistycznego wzoru na masę w ruchu.

https://newton-relativity.com/alternative-approach-to-theory-of-relativity/the-book-newton-and-relativity 2019, 2020, 2021

10 The Velocity Addition Formula

The conventional methods for deriving the addition formula for velocities are based on transformations. In the fifth chapter, however, it was stated that in the further course of this treatise we have to forego the help of any transformation, because on the one hand the Galilean transformation can only be used for low speeds and on the other hand a transformation for any speed has not yet been derived. We are therefore only dependent on the use of the conservation laws for mass, energy and momentum.

To add the velocities, we differentiate between two cases: case 1. for low speeds and case 2. for any speeds. From case 1. it should become clear what kind of method is used.

We assume that because of the central collision of two particles T_1 of mass m_1 and T_2 of mass m_2, a researcher O observes the formation of a new particle T of mass m_0, which remains with him at rest. A second observer O_1 is in the state of rest for particle T_1.

Case 1. Addition for low speeds

We imagine a physicist who would like to derive the addition formula of speed in the context of classical mechanics as an alternative, without using the Galilean transformation, which he does not know or whose correctness he does not trust. It refers to the thought experiment of Fig. 14 and only uses the conservation laws for mass and momentum of classical mechanics. For observer O it results:

$$m_0 = m_1 + m_2 \ (a) \qquad and \qquad m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \ \ (b)$$

If v_{12} is the speed of T_2 from the point of view of observer O_1, then the following applies for him:

$$m_2 v_{12} = m_0 v_1 \qquad (c)$$

Using relation (a) in (c) results in:

$$m_2 v_{12} = m_1 v_1 + m_2 v_1 \qquad (d)$$

From relation (b) we get: $m_1 v_1 = m_2 v_2$ and that inserted into equation (d) results in:

$$v_{12} = v_1 + v_2$$

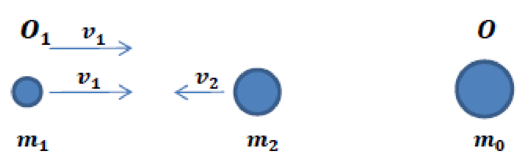


Fig. 14 (see the animation)

It will now be shown how the relativistic addition formula can be derived for any speed using an analogous method.

Case 2. Addition for any speed

In order to derive the relativistic addition formula for velocities, the energy and momentum conservation laws are applied to the collision of two dissimilar particles in the next thought experiment.

We will see that the somewhat more complicated calculation method, than that used in chapter 8 for equal masses and velocities, leads to the relation (8.7).

Assuming $\boldsymbol{m_{01}}$, $\boldsymbol{m_{02}}$ are the invariant masses and $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ are the velocities of $\boldsymbol{T_1}$ and $\boldsymbol{T_2}$, then the observer $\boldsymbol{O}$ will find the following relationship for the mass $\boldsymbol{m_0}$ of $\boldsymbol{T}$ due to the conservation of energy:

$$\boldsymbol{m_0 c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2} \qquad \Rightarrow$$

Or using the relation (5.4):

$$\boldsymbol{m_0 = \frac{m_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}} \tag{10.1}$$

On the other hand, the momentum of particle $\boldsymbol{T}$ is zero, because of momentum conservation before and after the collision:

$$\boldsymbol{\frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{m_{02}v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = 0} \tag{10.2}$$

If ${}^{v_x}\!/_{c}$ is replaced by $\boldsymbol{\beta_x}$ then:

$$\boldsymbol{\frac{m_{01}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\frac{\beta_2}{\beta_1}} \tag{10.3}$$

After the right-hand side of equation (10.3) has been inserted into equation (10.1) and the term $\boldsymbol{\frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}}$ has been excluded, the following results:

$$\boldsymbol{m_0 = \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\left(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \tag{10.4}$$

Unlike (10.1), Equation (10.4) expresses the value of the invariant mass of the formed particle $\boldsymbol{T}$ as a function of only <u>one</u> of the masses of the colliding particles. We will use this interim result in the course of this derivation.

We now assume a second observer $\boldsymbol{O_1}$, who is at rest to the particle $\boldsymbol{T_1}$. This can calculate the relative velocity $\boldsymbol{v_{12}}$ between $\boldsymbol{T_1}$ and $\boldsymbol{T_2}$ by applying momentum conservation before and after collision of the particles as follows:

Since the observer $\boldsymbol{O_1}$ is at rest at $\boldsymbol{T_1}$, the momentum $\boldsymbol{p_1}$ measured by him before the collision is only that of the particle $\boldsymbol{T_2}$ with mass $\boldsymbol{m_{02}}$, which moves towards $\boldsymbol{O_1}$ with the velocity $\boldsymbol{v_{12}}$:

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{m_{02}v_{12}}{\sqrt{1-\frac{v_{12}^2}{c^2}}}}$$

After the collision, $\boldsymbol{O_1}$ continues to move against particle $\boldsymbol{T}$ at the speed $\boldsymbol{v_1}$. Therefore, the momentum $\boldsymbol{p_2}$ measured by $\boldsymbol{O_1}$ is only that of the particle $\boldsymbol{T}$ with mass $\boldsymbol{m_0}$:

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}}$$

Because of the law of conservation of momentum, the momentum before and after the collision must remain the same ($\boldsymbol{p_1 = p_2}$). It follows:

$$\boldsymbol{\frac{m_{02}v_{12}}{\sqrt{1-\frac{v_{12}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}} \qquad \Rightarrow$$

In order to be able to carry out the following calculations more easily, $\boldsymbol{{}^{v_x}/_c}$ is now replaced by $\boldsymbol{\beta_x}$:

$$\boldsymbol{\frac{m_{02}\beta_{12}}{\sqrt{1-\beta_{12}^2}} = \frac{m_0\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}} \qquad (10.5)$$

(From this point on, see also a derivation in Appendix A IV that is based on the law of conservation of energy).

The term for $\boldsymbol{m_0}$ from (10.4) is now inserted into equation (10.5):

$$\boldsymbol{\frac{m_{02}\ \beta_{12}}{\sqrt{1-\beta_{12}^2}} = \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}}\beta_1\left(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \qquad \Rightarrow$$

Now $\boldsymbol{m_{02}}$ can be shortened on both sides and the bracket with the factor $\boldsymbol{\beta_1}$ can be simplified:

$$\boldsymbol{\frac{\beta_{12}}{\sqrt{1-\beta_{12}^2}} = \frac{\beta_1+\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}}} \qquad \Rightarrow$$

To solve the roots, both terms are squared left and right:

$$\boldsymbol{\frac{\beta_{12}^2}{1-\beta_{12}^2} = \frac{\beta_1^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2}{1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\beta_{12}^2 - \beta_{12}^2\beta_1^2 - \beta_{12}^2\beta_2^2 + \beta_{12}^2\beta_1^2\beta_2^2 =$$

$$= \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 - \beta_{12}^2\beta_1^2 - 2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2 - \beta_{12}^2\beta_2^2$$

Finally, the terms $\beta_{12}^2\beta_1^2$ and $\beta_{12}^2\beta_2^2$, which occur with the same sign on both sides of the equation, are eliminated. In addition, the term $2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2$ is transferred from the right to the left side of the equation.

It follows:

$$\beta_{12}^2 + 2\beta_{12}^2\beta_1\beta_2 + \beta_{12}^2\beta_1^2\beta_2^2 = \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\beta_{12}^2(1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2) = \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2$$

It is easy to see that the left and right sides of the equation contain squares of binomial formulas.

$$\beta_{12}^2(1 + \beta_1\beta_2)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 \quad \Rightarrow$$

It follows:

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

Finally, replacing $\boldsymbol{\beta_x}$ by $\mathbf{v_x/c}$ yields the relativistic velocity addition formula:

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \qquad (10.6)$$

The relation (10.6) agrees with the formula of Einstein's relativistic addition formula for velocities.

Of course, a derivation based on the law of energy conservation leads to the same result (see Appendix A IV).

It should be emphasized once again that the equation (10.6) has been derived only by the use of conservation laws. The postulate of the constancy of the speed of light has not been used against it.

Applying the law of energy and momentum conservation to the central collision of two particles makes it possible in the general case to derive the relativistic addition formula of velocities without using the postulate of the constancy of the speed of light.

Dodatek 2

Wyprowadzenie wzoru na niezmiennik relatywistyczny energia-pęd z definicji działania i funkcji Lagrange'a w czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego:

„Analytical proof of the relation $E_0 = m_0\, c^2$ znajduje się w każdym porządnym podręczniku Szczególnej Teorii Względności i składa się z następujących dwu kroków:

(1) Obieramy działanie Hamiltona dla punktu materialnego, zwracając uwagę, że jest tylko jedna możliwość, tzn., że działanie jest określone jednoznacznie i że jedyną dowolnością jest stała multiplikatywna m.

(2) Z pierwszego twierdzenia Emmy Noether obliczamy całkowitą energię i pęd jako całki pierwsze wynikające z translacyjnej inwariantności tego działania, i pokazujemy, że tworzą one czterowektor, którego kwadrat wynosi m^2. To od razu daje zależność energii i pędu jako całek Noether od prędkości!"
Zamiast tego całkowicie jasnego i bezbłędnego rozumowania Autorzy proponują „wyprowadzenie" oparte na newtonowskim równaniu ruchu dla ciała ze zmienną masą tzn. za punkt wyjścia biorą coś co nigdy nie ma miejsca w rzeczywistości: cząstki elementarne takie jak proton, do których stosujemy omawiane równanie , zawsze zachowują dokładnie taką samą masę, niezależnie od tego do jakich prędkości zostały w międzyczasie przyspieszone!"

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow p^2c^2 = (m_0^2c^2 + p^2)v^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E = \gamma m_0 c^2 \\ p = \gamma m_0 v \end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2}{(\gamma m_0)^2} = \frac{p^2}{\left(\frac{E}{c^2}\right)^2}$$

stąd $\quad \cancel{p^2} c^2 = (m_0^2c^2 + p^2) \cdot \frac{\cancel{p^2} c^4}{E^2}$

$$\underline{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4}$$

Z mechaniki Lagrange'owskiej

Działanie: $\quad S = -mc\int ds \quad , (ds)^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

stąd $\quad ds = \sqrt{c^2 - v^2}\,dt$

$$S = -mc\int\sqrt{c^2-v^2}\,dt = -mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

Z definicji f. Lagrange'a: $\quad S = \int L\,dt$

stąd Lagrangian: $\quad \underline{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Hamiltonian: $\quad H = pv - L$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}$$

Zatem: $\quad H \equiv E = \frac{p^2c}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}} = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$

Stąd: $\quad \underline{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = -mc^2\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(\frac{-2v}{c^2}\right) = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$