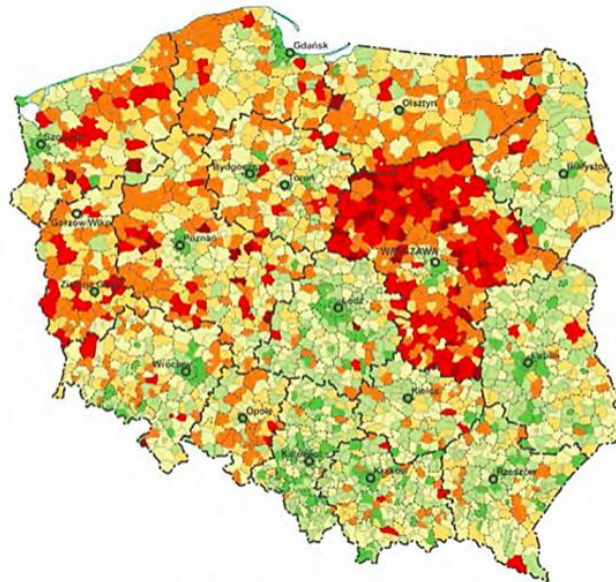


# Metody probabilistyczne w fizyce stosowanej: teoria wyboru społecznego i informacja kwantowa

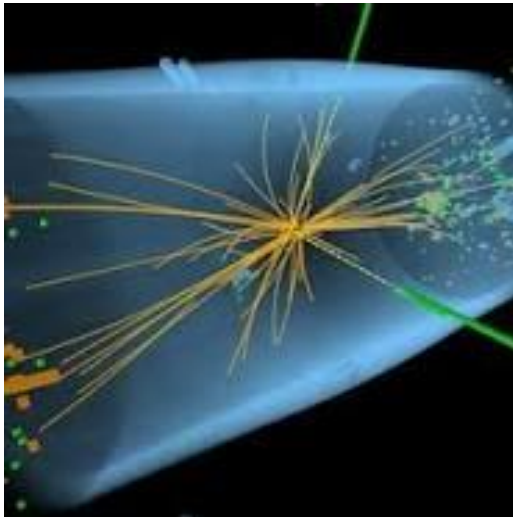


**Karol Życzkowski (UJ / CFT PAN)**  
**AGH, Kraków, 5 czerwca 2020**

# Co to jest fizyka?

## Fale grawitacyjne:

- teoria: 1905 Poincare  
1916 Einstein
- doświadczenie: 2015/16



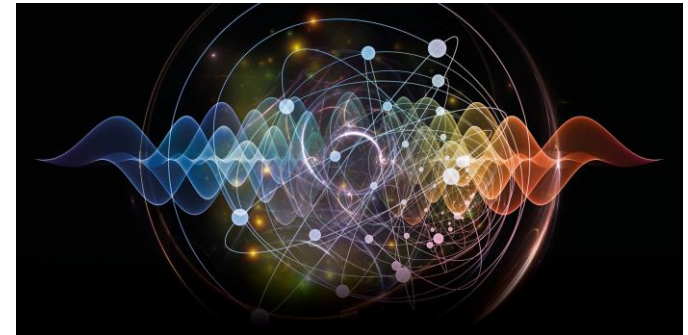
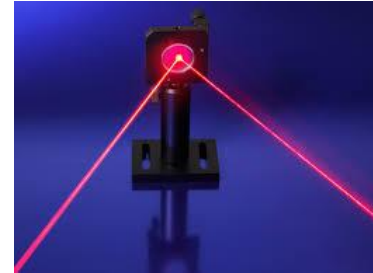
## Bozon Higgsa

- teoria: 1964 Higgs, Englert, Brout, Guralnik, Hagen, Kibble
- doświadczenie: 2012

# fizyka stosowana – też **fizyka** !

## a) Zastosowania odkryć fizycznych w technice

- tranzystor, laser, półprzewodniki...
- technologie kwantowe (Milburn 1997)  
kwantowa kryptografia, komunikacja,  
kwantowe komputery...
- inżynieria kwantowa,
- kwantowe materiały



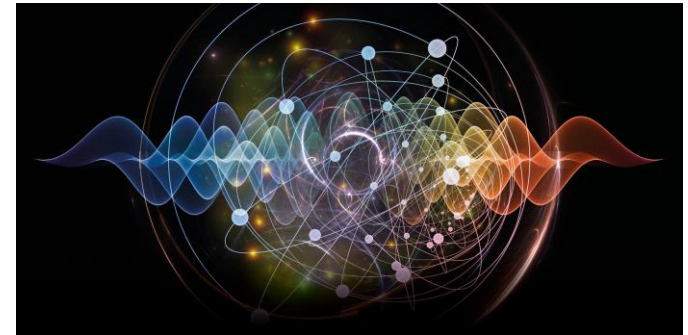
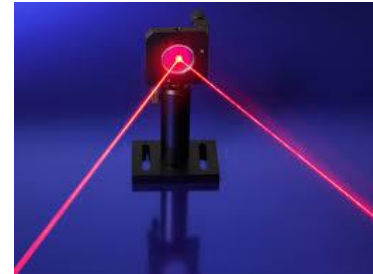
nqt.ac.uk

## b) Wykorzystanie metod stosowanych w fizyce w innych dziedzinach...

# fizyka stosowana – też **fizyka** !

## a) Zastosowania odkryć fizycznych w technice

- tranzystor, laser, półprzewodniki...
- technologie kwantowe (Milburn 1997)  
kwantowa kryptografia, komunikacja,  
kwantowe komputery...
- inżynieria kwantowa,
- kwantowe materiały



nqt.ac.uk

## b) Wykorzystanie metod stosowanych w fizyce w innych dziedzinach...

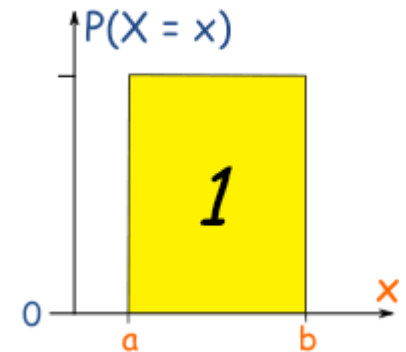


# metody probabilistyczne



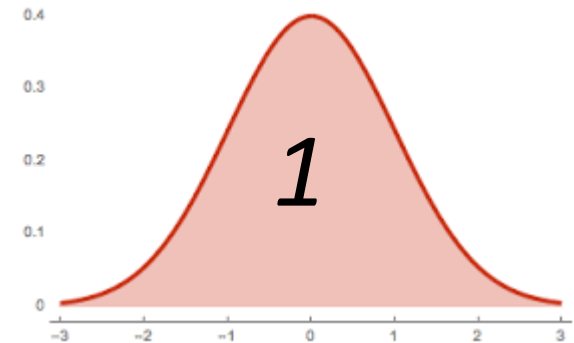
zespół (*ensemble*) = {zbiór  $X$  + miara  $\mu$ }

1) płaski rozkład na odcinku,  $X=[0,1]$



2) rozkład normalny (Gausa)

$X=(-\infty, +\infty)$



# metody probabilistyczne



zespół (*ensemble*) = {zbiór  $X$  + miara  $\mu$ }

1) płaski rozkład na odcinku,  $X=[0,1]$

uogólnienia na  $N$  wymiarów:

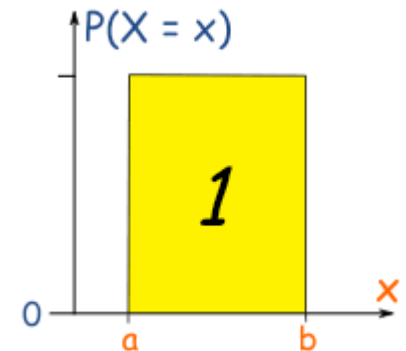
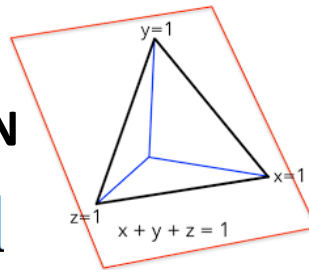
a) kostka  $[0,1]^N$



b) sympleks

probabilistyczny  $\Delta_N$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1$$

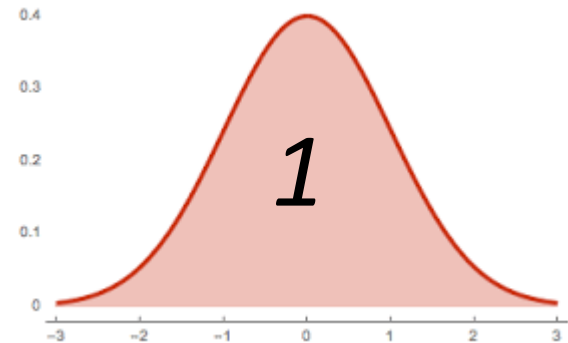


2) rozkład normalny (Gausa)

$X=(-\infty, +\infty)$

a) wektor  $N$  liczb Gaussowskich

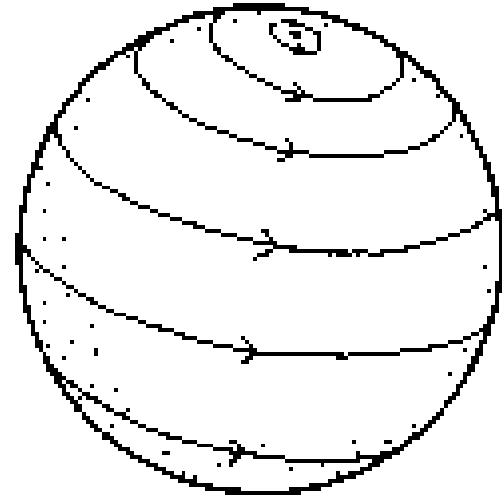
b) macierz Ginibre'a  $N \times N$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Jak wygląda sfera  $S^2$  ?

A jak wygląda **hipersfera**  $S^N$  ?



Jak wygląda sfera  $S^2$  ?

A jak wygląda **hipersfera**  $S^N$  ?

Ustal punkt  $x$  (biegun) na  $S^N$   
i wylosuj  $y$ .

Ile wynosi kąt  $\vartheta$  pomiędzy oboma wektorami ?

Jakobian zmiany zmiennych wyznacza rozkład:

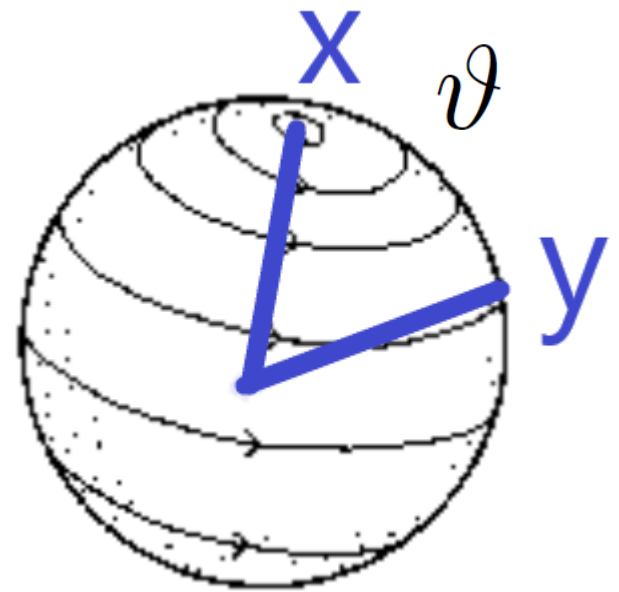
$$P(\vartheta) \sim (\sin \vartheta)^{N-1}$$

z ostrym maksimum dla kąta  $\vartheta \approx \pi/2$ ,

więc typowy punkt  $y$  leży na „równiku”  $S^N$

- koncentracja miary wokół „**tłustego równika**”  $S^N$

- koncentracja miary na brzegu piłki  $B^N$  -gruba skóra





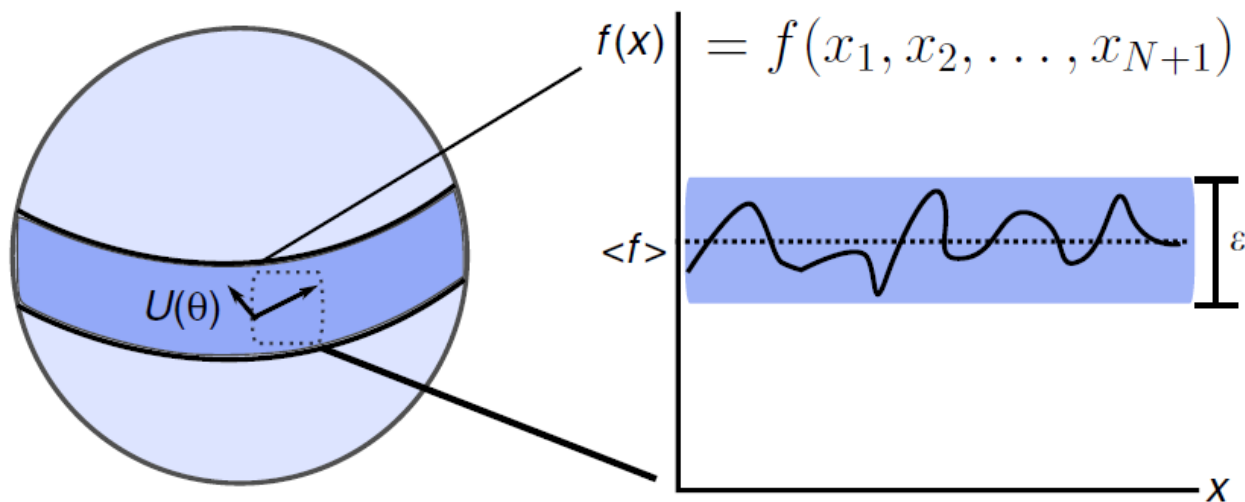


koło Plant

# Lemat Lévy'ego:

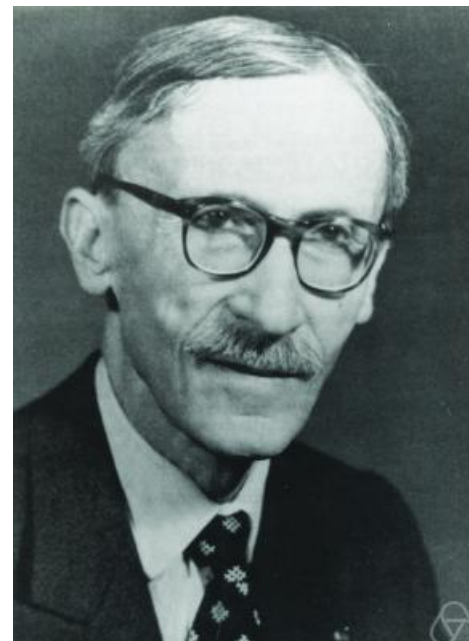
$f(x)$  - funkcja na sferze  $S^N$ ,  
 $\langle f \rangle$  - jej wartość średnia, to  
duże odchylenia są rzadkie:

$$P(|f(x) - \langle f \rangle| > \varepsilon) \leq \exp(-cN\varepsilon^2)$$



J.R. McClean et al. (2018)

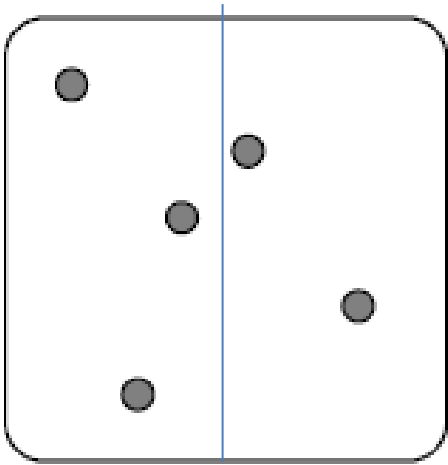
**Paul Lévy**  
(1886 – 1971)



**rozkłady,  
procesy,  
przeloty  
Lévy'ego**

# Lemat Lévy'ego i fizyka statystyczna:

1000 cząstek gazu w pudle:

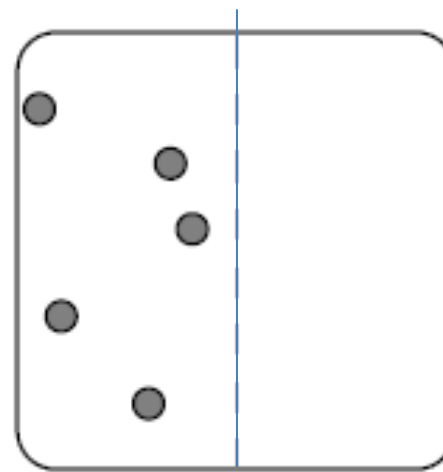


**przypadek typowy:**

500 +  $\varepsilon$  po lewej i

500 -  $\varepsilon$  po prawej

stronie pudła



**przypadek nietypowy:**

1000 po lewej i

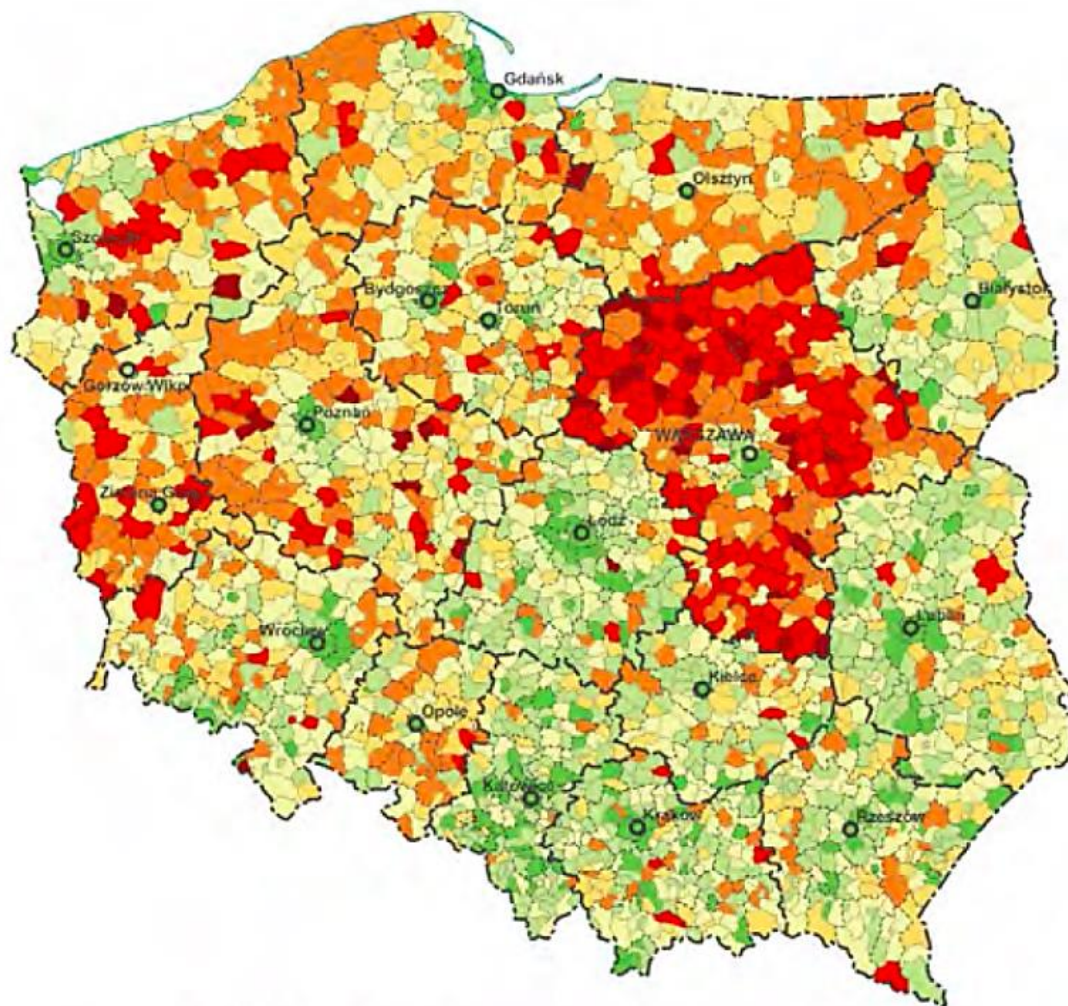
0 po prawej

stronie pudła

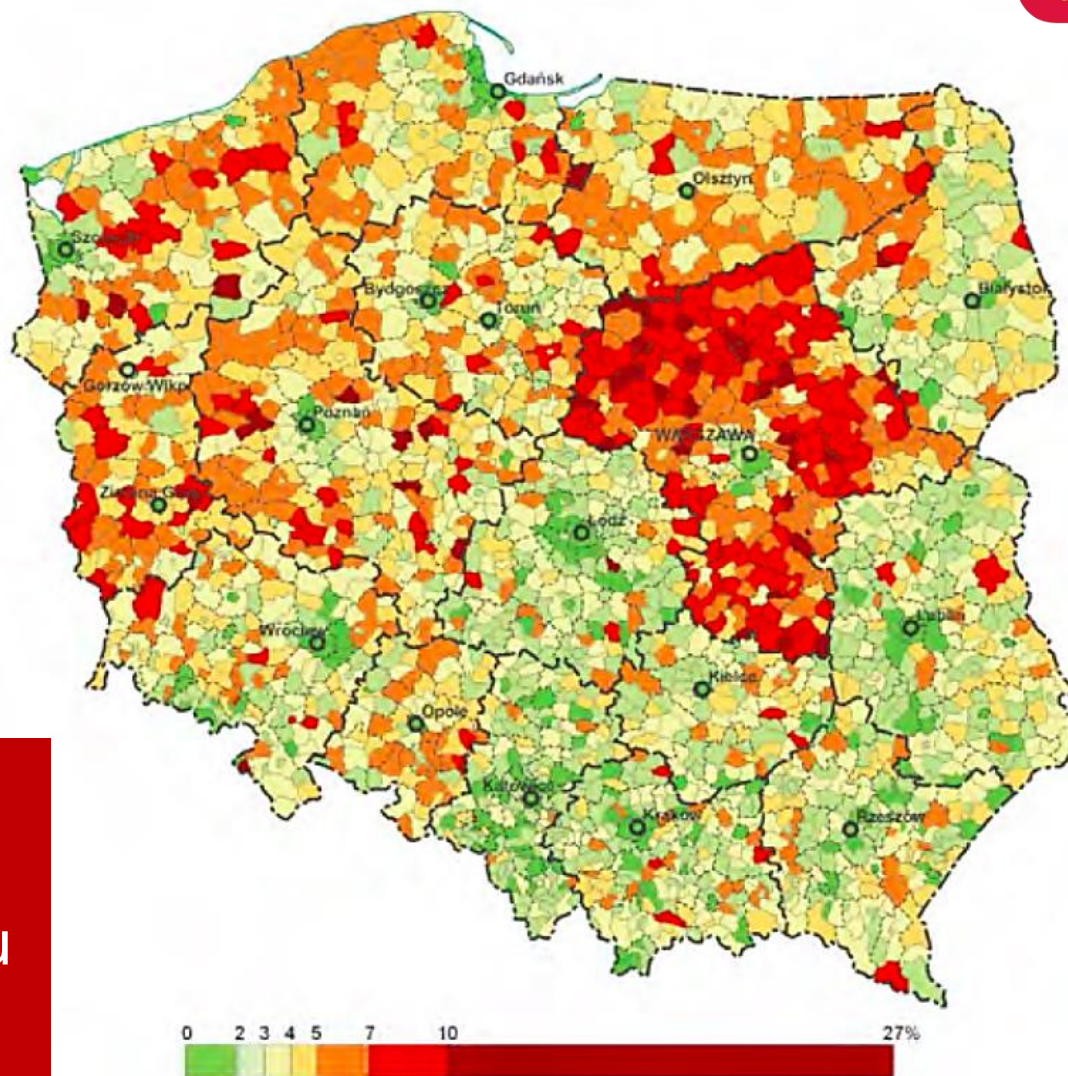




**Otton Nikodym oraz Stefan Banach  
rozmawiają na ławce na krakowskich Plantach  
lato 1916**



# WYBORY SAMORZĄDOWE W POLSCE (2010)



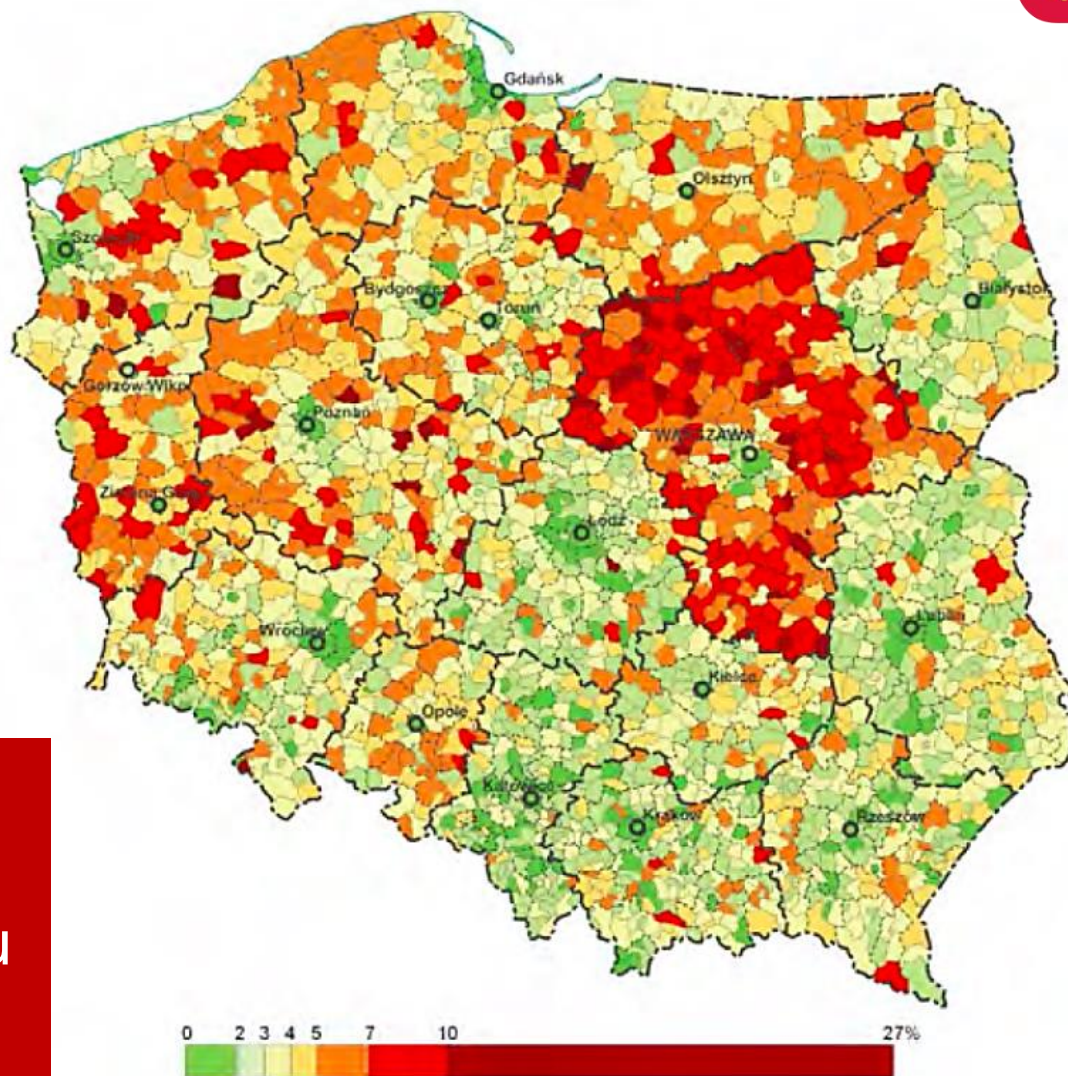
Kolor czerwony:  
dużo głosów  
nieważnych z powodu  
postawienia na karcie  
więcej niż jednego  
znaku X

# WYBORY SAMORZĄDOWE W POLSCE (2010)



próba wyjaśnienia:  
*tylko na Mazowszu*  
*karty do*  
*głosowania miały*  
*formę książeczki,*  
*mylącej wyborców*

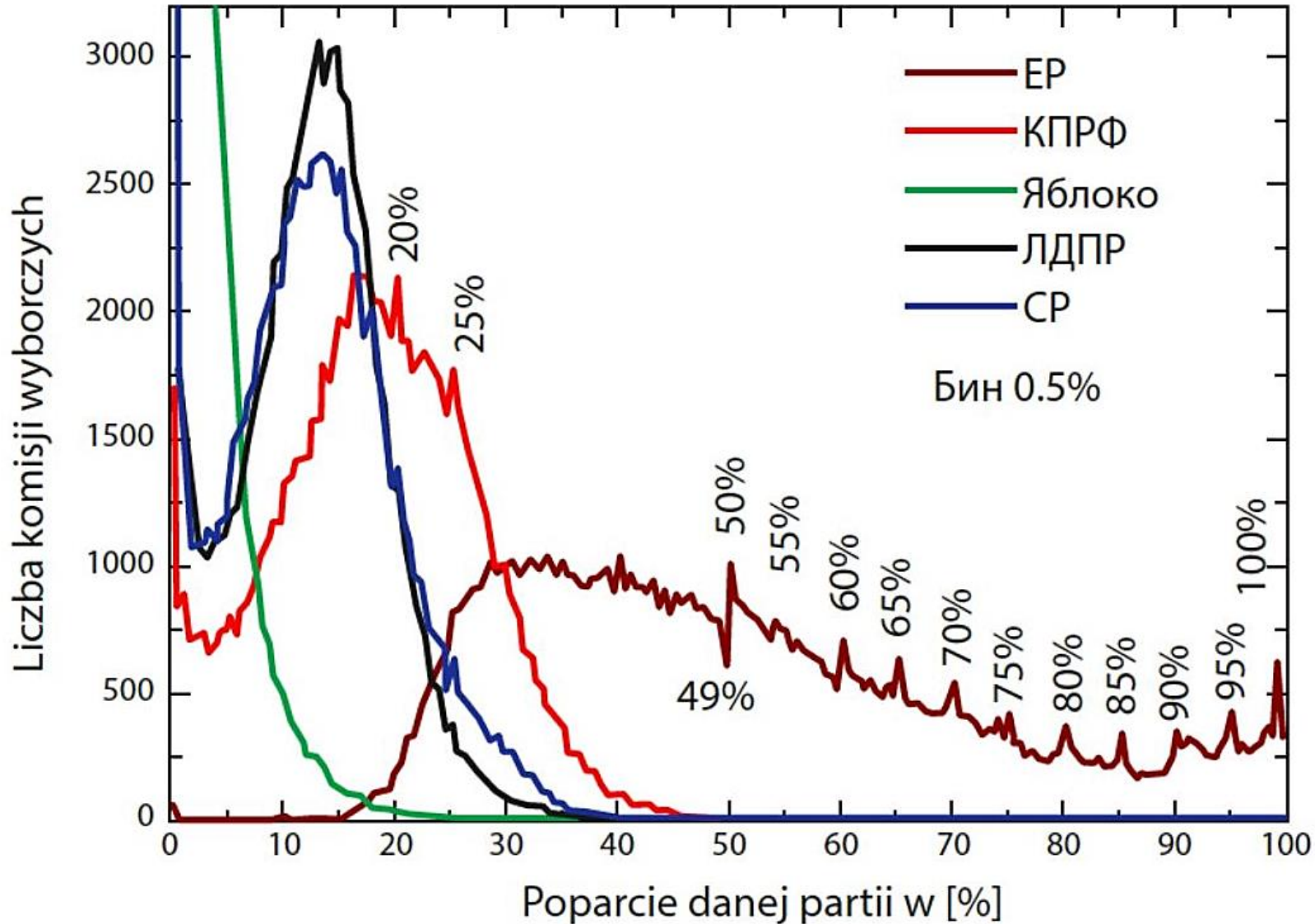
(eksperyment :  
2014 !)



Kolor czerwony:  
dużo głosów  
nieważnych z powodu  
postawienia na karcie  
więcej niż jednego  
znaku X

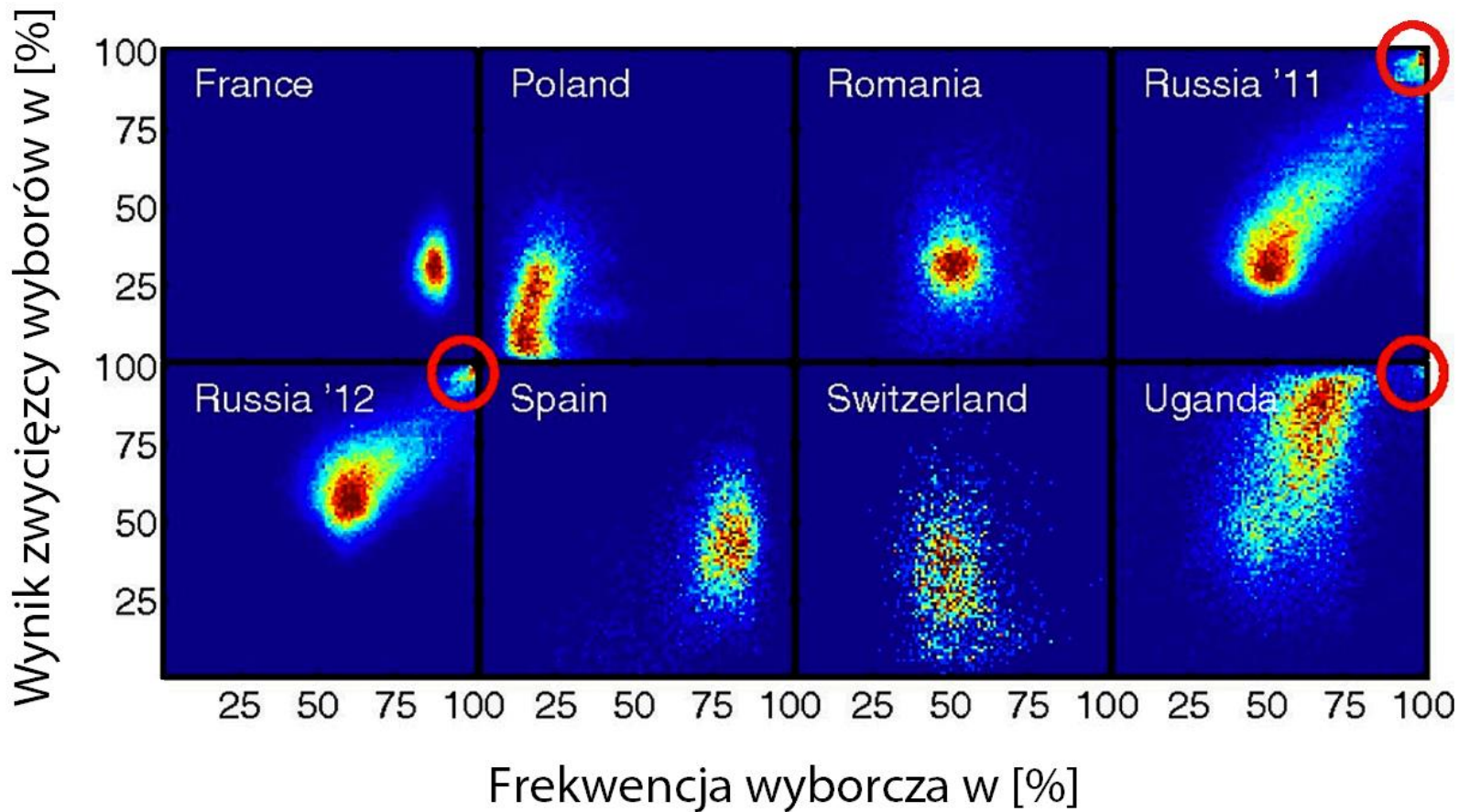


# REZONANSE PUTINA (DUMA - 2011)



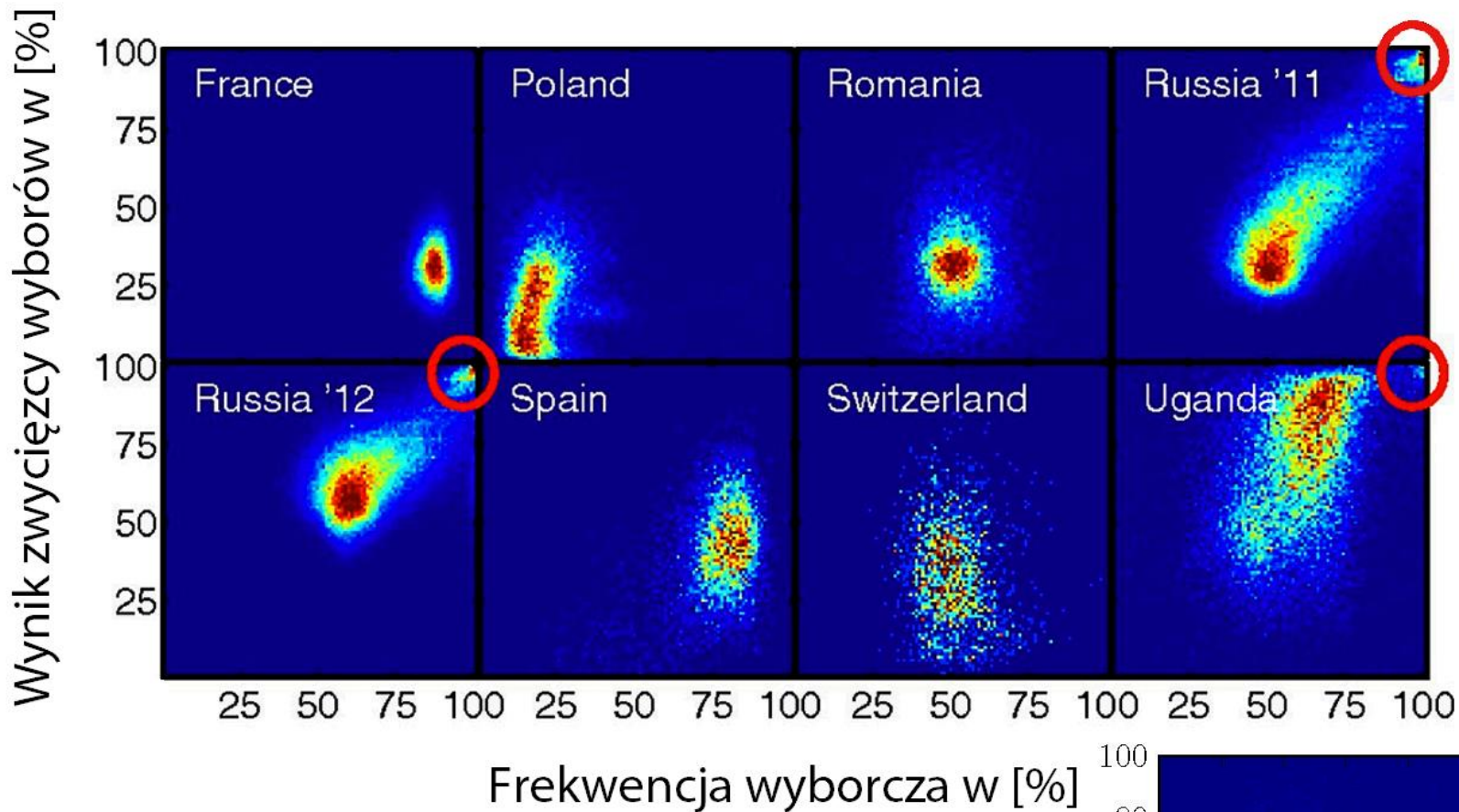
Siergiej Szpilkin (2012)

# KOMETY PUTINA (2011, 2012)

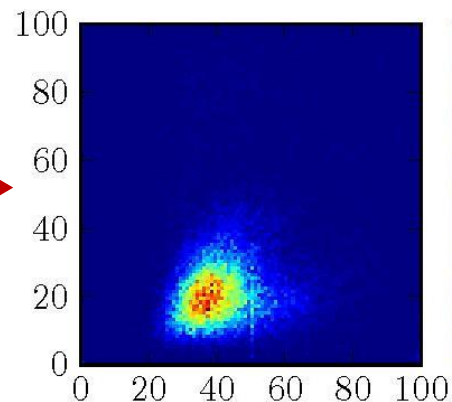


Wyborcze „**odciski palców**” wg Klimek et al. 2012  
rozkład poparcia dla zwycięskiej partii oraz  
frekwencja w obwodach wyborczych

# Brak komety w Polsce (maj 2014)



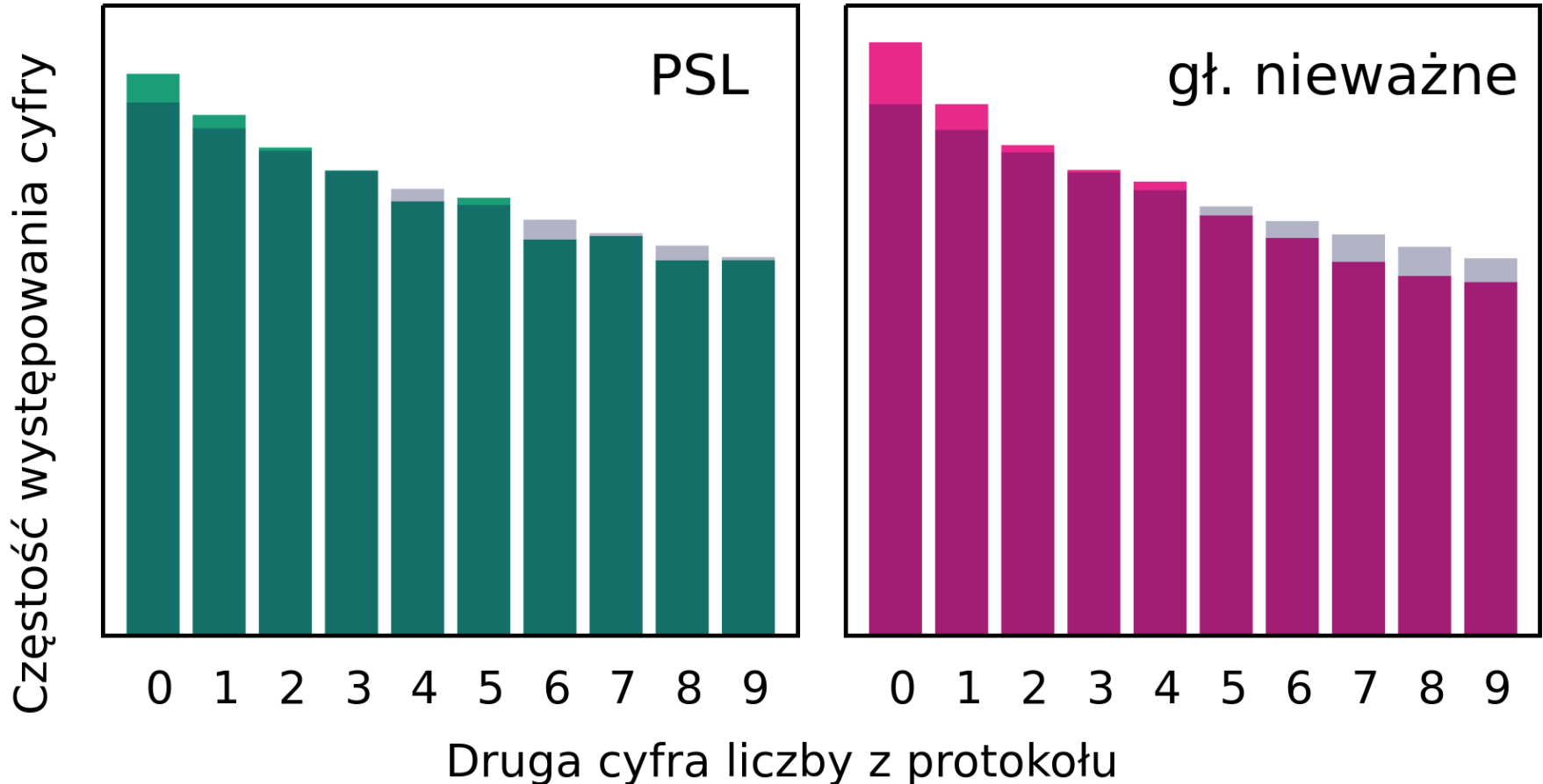
**Polska (maj 2014)** →



P. Gawron, Ł. Paweła, Z. Puchała



# Wybory samorządowe – listopad 2014



*Porównanie danych z prawem Benforda*

*Jacek Szklarski, 2015*

# Każdy głos się liczy!



Kazimierz Rzążewski, Wojciech Słomczyński,  
Karol Życzkowski

*Wydawnictwo Sejmowe*, Warszawa 2014

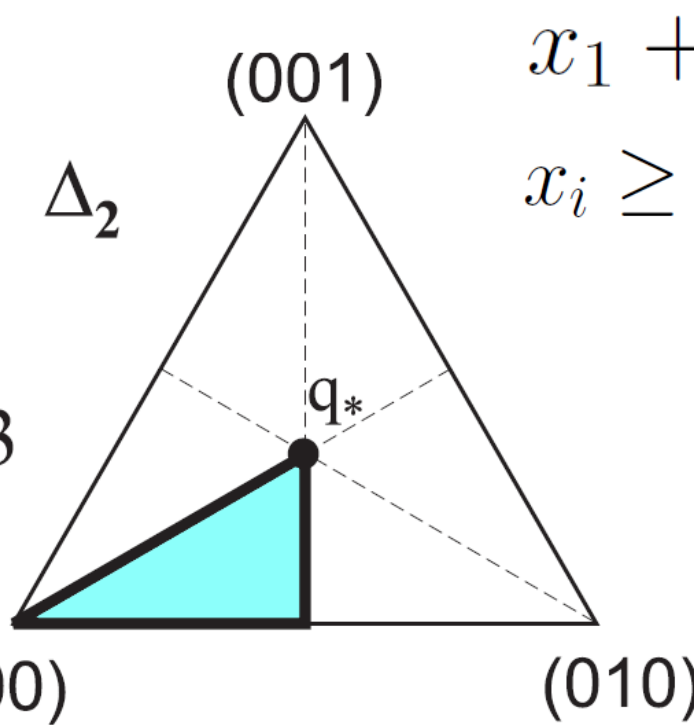
<https://kazdyglos.eu>

**Wybory z  
3 kandydatów**

$$\langle x_i \rangle = 1/3$$

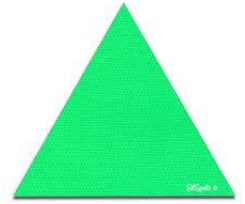
$$N = 3$$

**Jakie  
poparcie  
uzyska  
zwycięzca?**



$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_i \geq 0$$

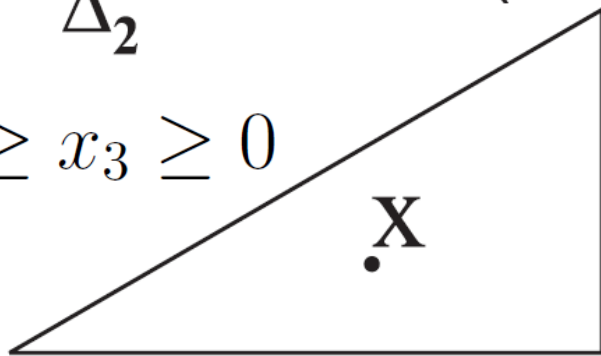


**Płaski rozkład  
na sympleksie  
prawdopodo-  
bieństwa**

b)  $\tilde{\Delta}_2$

$$(111)/3 = q_*$$

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$$



**Barycentrum  
asymetrycznego  
sympleksu :**

$$\vec{x} = (11, 5, 2)/18$$

$$(100)$$

$$(110)/2$$

$$\langle x_{\max} \rangle = 11/18 \approx 61,1\%$$

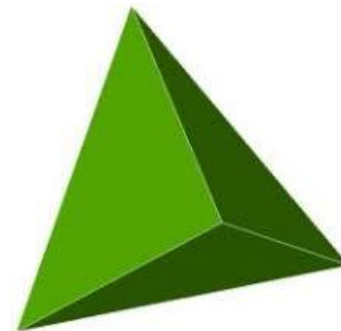
**Wybory z  $N$  kandydatów:** sympleks  $\Delta_N \subset \mathbb{R}^{N-1}$

wartość średnia  $\langle x_i \rangle = 1/N$

**a) miara płaska:**

uporządkowany wektor

$$\langle x_k^\downarrow \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=k}^N 1/j \quad \langle x_{\max} \rangle \approx \log N/N$$
$$\langle x_{\min} \rangle = 1/N^2$$

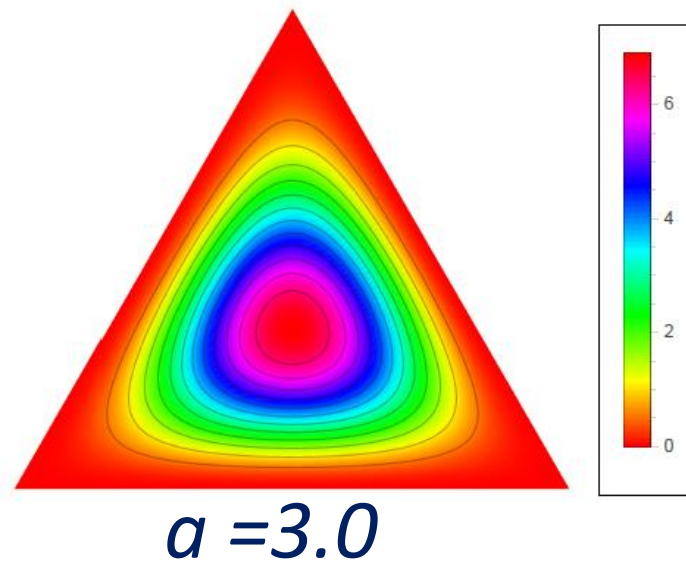


podójście realistyczne:

**b) rozkład Dirichleta**

$$P_a(x_1, \dots, x_N) = C_n \prod_{j=1}^N x_j^{a-1}$$

+ fitowanie parametru  $a$   
z danych historycznych



# Waga głosu $w$ a siła głosu $\beta$

uczestnika głosowania wg udziałów

waga głosu  $w_j$  gracza  $G_j =$

odsetek posiadanych udziałów

siła głosu  $\beta_j$  gracza  $G_j =$  prawdopodobieństwo,  
że jego głos będzie decydujący

(bez niego koalicja nie będzie wygrywająca)

**indeks siły Penrose'a-Banzhafa  $\beta_i$**

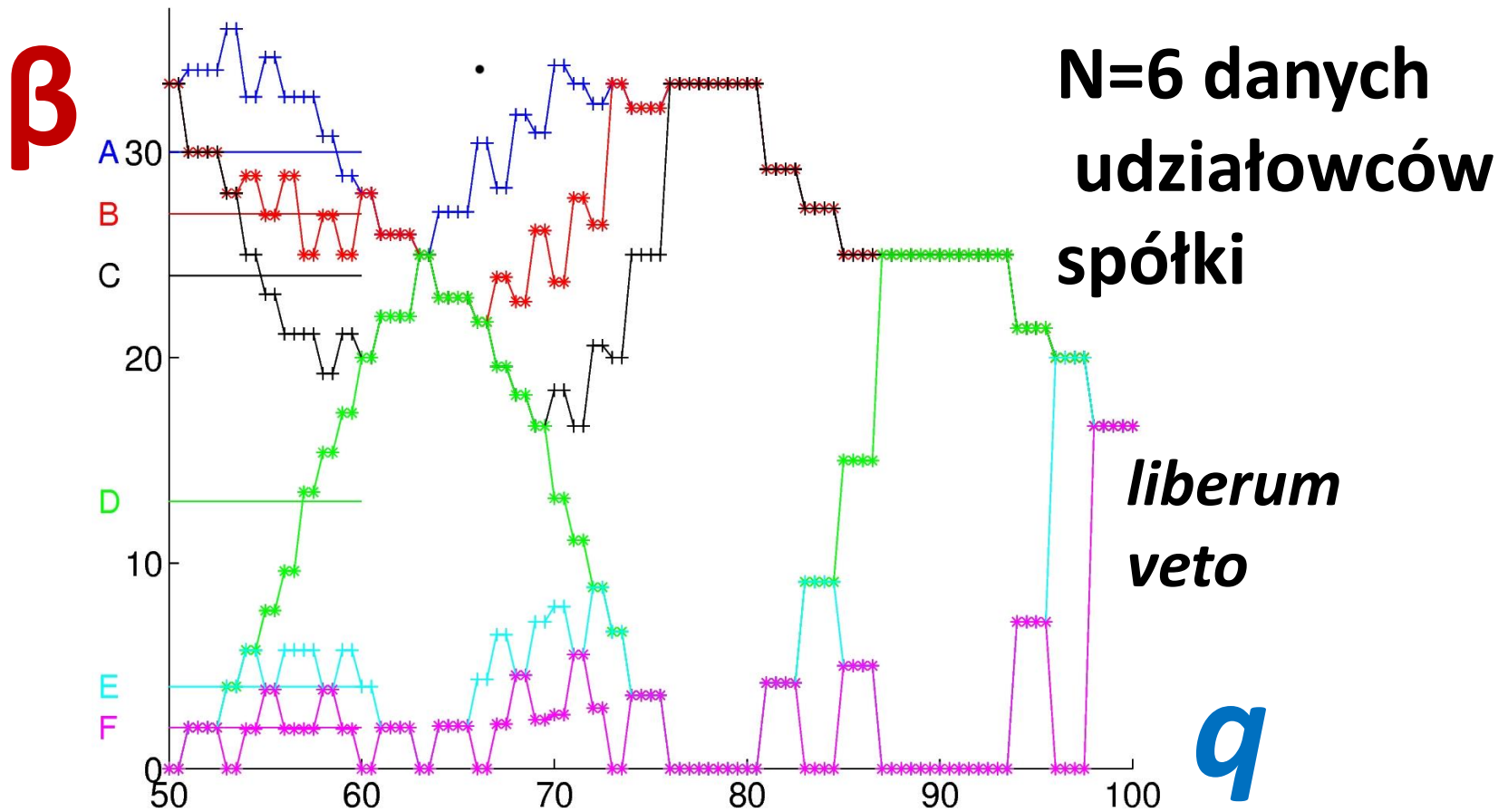
jest znormalizowany, tak aby  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$

Przykład:  $N=3$  graczy, wagi  $\vec{w} = (47, 45, 8)/100$

- a) próg  $q=0.50$ ,  $\vec{\beta} = (1, 1, 1)/3$  zwykła większość
- b) próg  $q=0.60$ ,  $\vec{\beta} = (1, 1, 0)/2$  większość kwalifikowana



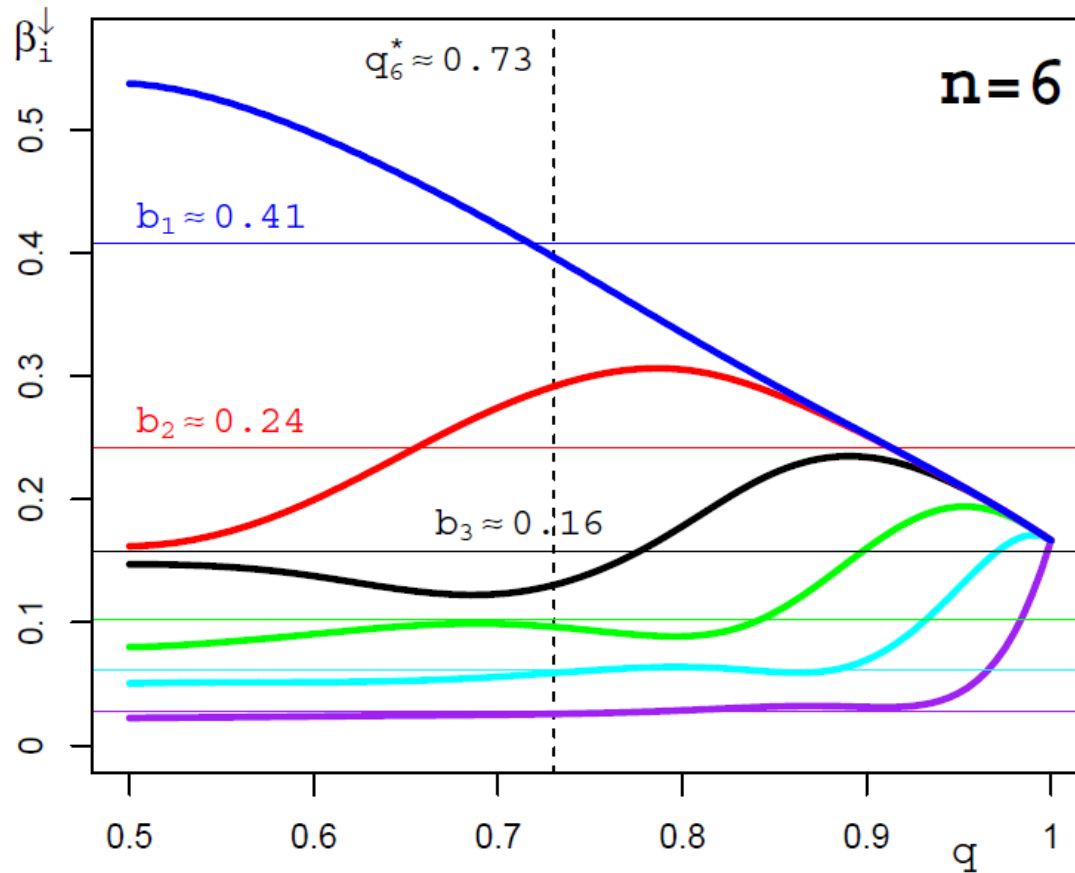
# Głosowanie w spółkach handlowych



Zależność **siły głosu  $\beta$**  (wskaźnik **Penrose'a-Banzhafa**) dla sześciu udziałowców spółki (**A z 30, B 27, C 24, D 13, E 4, F z 2** udziałami) od progu **większości kwalifikowanej  $q$** .

# Głosowanie w spółkach handlowych

$\beta$



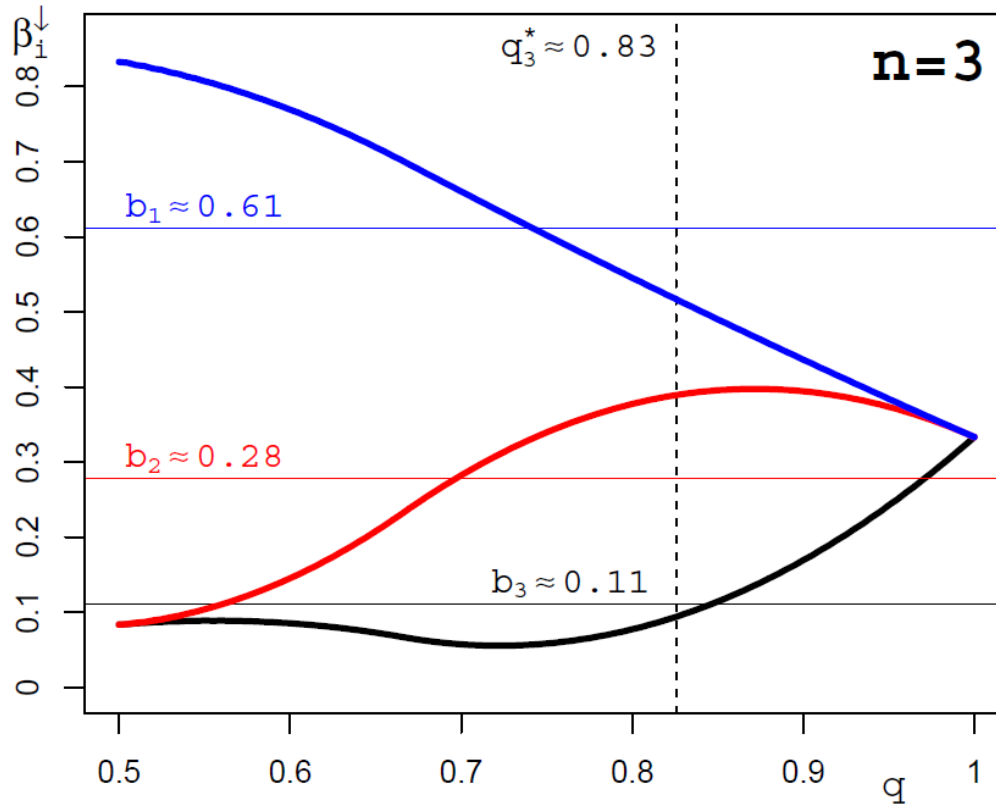
**N=6 (losowych)  
udziałowców  
średnia siła  
głosu**

$q$

Zależność **siły głosu  $\beta$**  (wskaźnik **Penrose'a-Banzhafa**) dla  
dla sześciu udziałowców spółki z losowymi udziałami  
**uśredniona** po sympleksie względem **płaskiej miary**  
od progu **większości kwalifikowanej  $q$** . Próg optymalny  $q_*$

# Głosowanie w spółkach handlowych

$\beta$



**N=3 (losowych)  
udziałowców:  
średnia siła  
głosu**

*krzywe gładkie:  
sklejka  
stopnia N-1*

$q$

Zależność **siły głosu**  $\beta$  dla  $N=3$  udziałowców spółki z losowymi udziałami **uśredniona** po trójce względem **płaskiej miary** od progu **większości kwalifikowanej**  $q$ .

**próg optymalny**

$$q_* \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi N}}$$

D. Boratyn, W. Kirsch, W. Słomczyński, D. Stolicki,  
K.Ż. **Average Weights and Power**  
**in Weighted Voting Games**, [arXiv:1905.04261](https://arxiv.org/abs/1905.04261)



**Centrum Badań Ilościowych  
nad Polityką UJ**

<http://www.cbip.uj.edu.pl/>

[D. Boratyn](#), [W. Kirsch](#), [W. Słomczyński](#), [D. Stolicki](#),

**K.Ż. Average Weights and Power**

**in Weighted Voting Games**, [arXiv:1905.04261](#)

Mathematical Social Choice, 2020 (*in press*)



**Centrum Badań Ilościowych  
nad Polityką , UJ**

<http://www.cbip.uj.edu.pl/>



**Wawel w Krakowie**



**Twierdzenie Danuty i Krzysztofa Ciesielskich:**



Tw. Ciesielskich: z prawdopodobieństwem  $1-\varepsilon$  ławka,  
na której w roku 1916 Banach dyskutował z Nikodymem  
znajdowała się w  $\eta$  – otoczeniu czerwonej strzałki



# Tablica upamiętniająca rozmowę Nikodyma i Banacha

LETNIM WIECZOREM 1916 ROKU DWAJ MŁODZI KRAKOWLANIE,

STEFAN BANACH I OTTON NIKODYM,

NA ŁAWCE NA PLANTACH ROZMAWIALI O MATEMATYCE.

DO DYSKUSJI WŁĄCZYŁ SIĘ PRZECHODZĄCY OBOK MATEMATYK,

DR HUGO STEINHAUS.

TAK ZOSTAŁ ODKRYTY NIEZWYKŁY MATEMATYCZNY TALENT STEFANA BANACHA,

JEDNEGO Z NAJWYBITNIEJSZYCH POLSKICH UCZONYCH.

OTTON NIKODYM



STEFAN BANACH

IN CONVERSATION ABOUT MATHEMATICS.

THIS BENCH MEMORISES THEIR FAMOUS MEETING WITH HUGO STEINHAUS IN THE

PLANTY GARDEN IN SUMMER 1916.

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

VOLUME 129

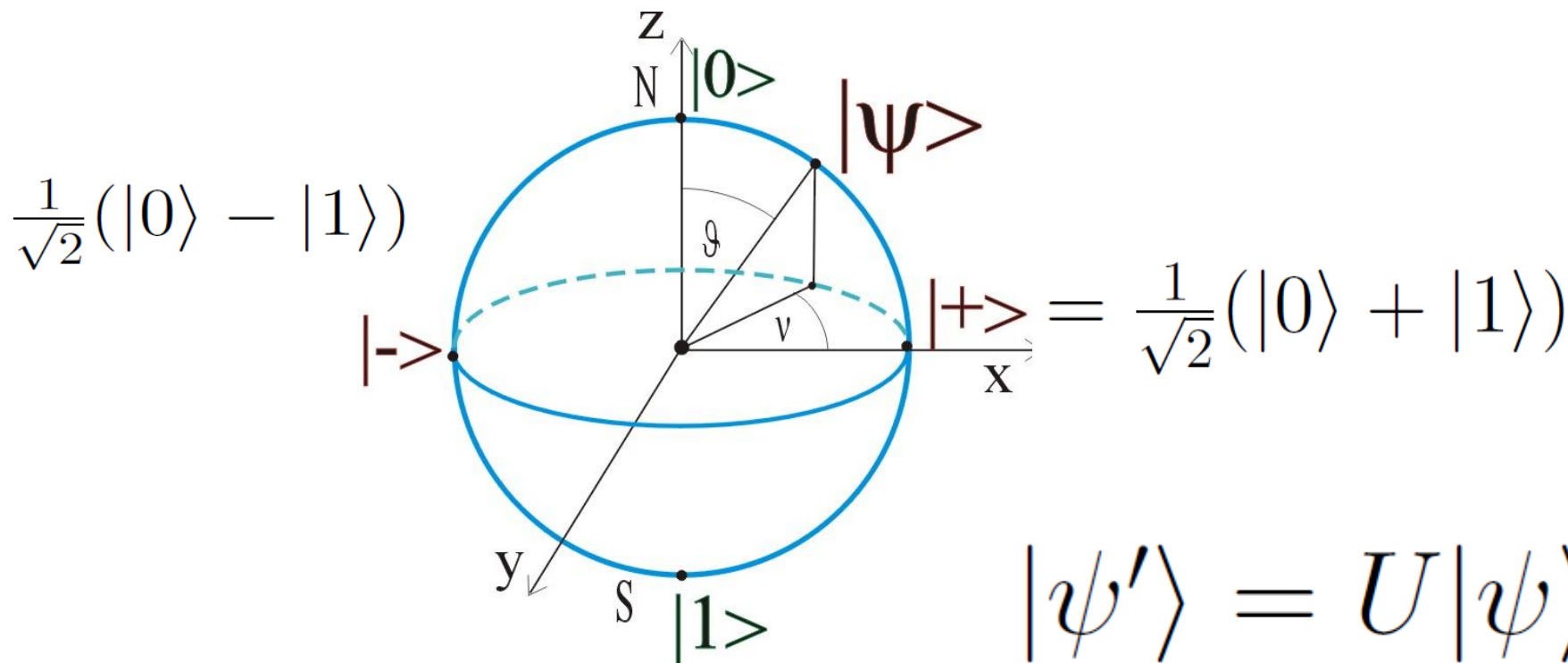
The Mathematical Apparatus  
for Quantum-Theories

Otton Martin Nikodým

Springer-Verlag New York Inc. 1966

**1 kubit: stany klasyczne:  $|0\rangle, |1\rangle$**

**stany nieklasyczne:  $|+\rangle, |-\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$**



**superpozycja kwantowa – stan czysty  $|\psi\rangle$**

**różni się od klasycznej mieszanki stanów  
(punkt wewnątrz kuli Blocha)**

# Układy dwucząstkowe: {A,B}

a) Stan **separowalny** (produktowy)

$$|\psi_{\text{sep}}\rangle = |\psi_A, \psi_B\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

b) Stan **splątany** (nieproduktowy)

$$|\psi_{\text{ent}}\rangle \neq |\psi_A, \psi_B\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

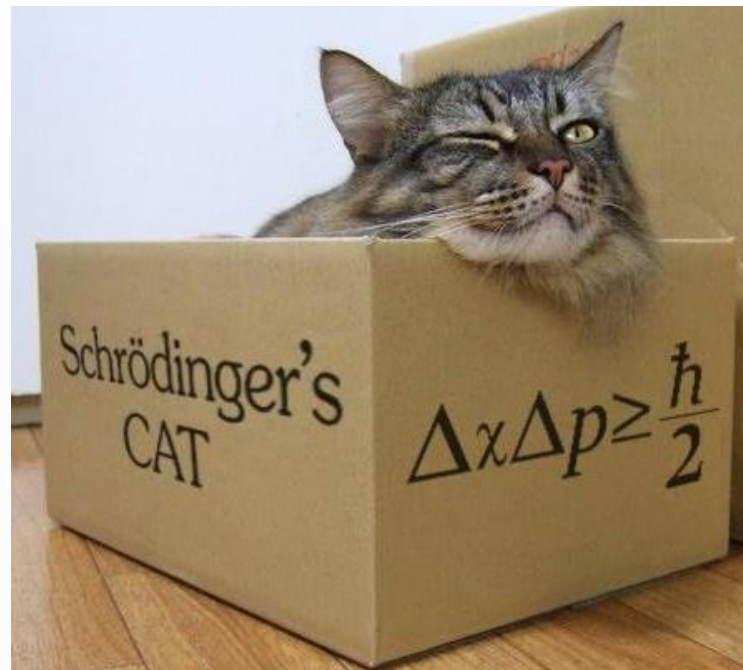
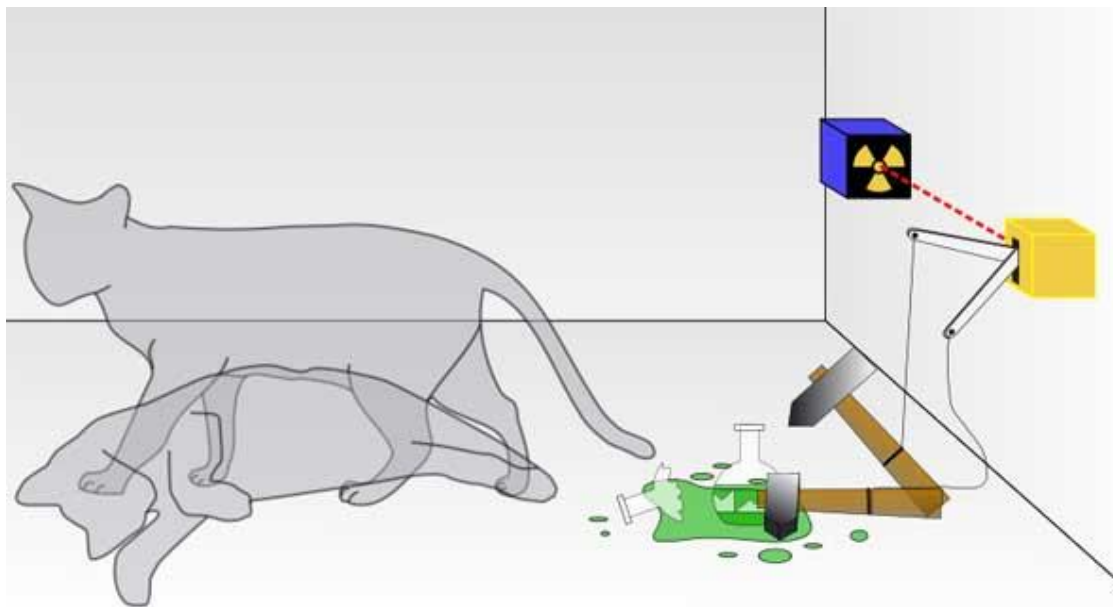
**Superpozycja 2 stanów dwucząstkowych**

Przykład: stan **Bella**

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

Stan **splątany** wykazuje kwantowe korelacje, to skutek uprzedniego **odziaływania** pomiędzy **podukładami**

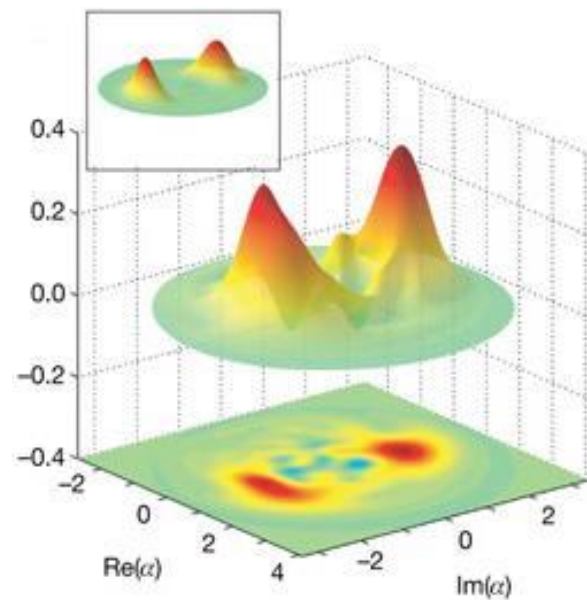
# Kot Schrödingera



**Kwantowa superpozycja:**

$$|\uparrow\rangle | \text{cat sitting} \rangle + |\downarrow\rangle | \text{cat lying} \rangle$$

**stan splątany**



**Haroche (i inni) 2008**

# Rozkład Schmidta oraz miary splątania

Każdy stan czysty z  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  można przedstawić

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} G_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i'\rangle \otimes |i''\rangle.$$

Częściowy ślad,  $\sigma = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| = GG^\dagger$ , ma widmo dane przez **wektor Schmidta**  $\{\lambda_i\} =$  **wartości singularne** macierzy  $G$ .

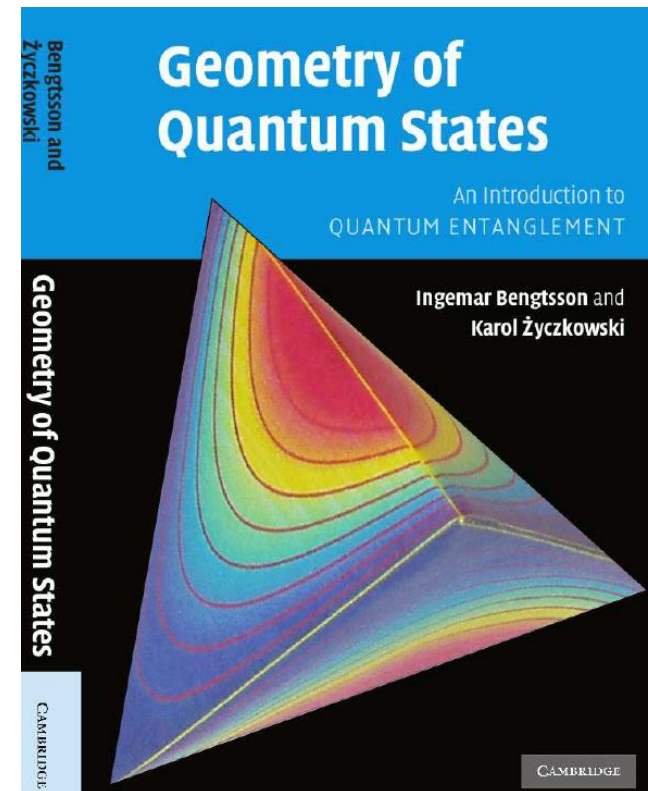
**Entropia Splątania** stanu  $|\psi\rangle$  jest równa **entropii von Neumanna** stanu zredukowanego  $\sigma$

$$E(|\psi\rangle) := -\text{Tr} \sigma \ln \sigma = S(\lambda).$$

Im bardziej splątany stan  $|\psi\rangle$  tym bardziej zmieszany stan zredukowany  $\sigma$ .

## Geometryczna miara splątania

- odległość stanu  $|\psi\rangle$  od zbioru stanów separowalnych - jest funkcją największej składowej  $\lambda_{\max}$ .



# Typowy stan czysty układu dwu-cząstkowego $N \times N$

Podzbiór stanów produktowych jest miary **zero**.

Dlatego typowy stan czysty takiego układu jest **splątany!**

Jak mocno splątany? **Bardzo mocno!**

## Średnia entropia zredukowanej macierzy gęstości $\sigma$

wartość **maksymalna**  $S_{\max} = \log N$

wartość **średnia**  $\langle S \rangle = \log N - 1/2$

**Lemat Levy'ego** pozwala pokazać, że typowe odchylenia są małe

**Hayden, Leung, Winter (2006)**

## Średnia geometryczna miara splątania $E_G = -\log(\lambda_{\max})$

Typowy stan czysty  $|\psi\rangle$  zadany macierzą Ginibre'a  $G$

stan zredukowany  $\sigma = GG^\dagger$  to losowa macierz **Wisharta** z widmem

opisanym rozkładem **Marchenko-Pastura** z nośnikiem  $x = N\lambda \in [1, 4]$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} \approx 4/N \Rightarrow E_G \approx \log N - \log 4.$$

Ławka upamiętniająca dyskusję  
**Ottona Nikodyma i Stefana Banacha** (Kraków, **1916**)



rzeźba: Stefan Dousa

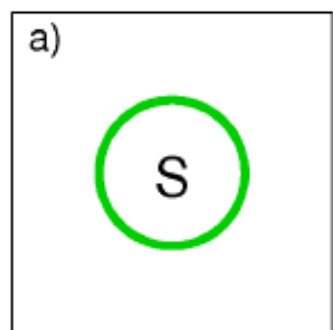
fot. Andrzej Kobos

odśłonięta na Plantach w Krakowie w dniu 14 X **2016**

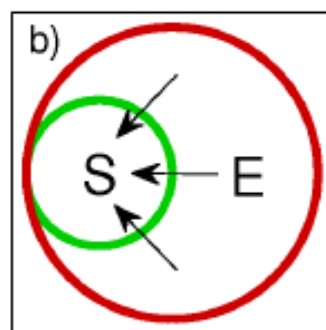


# Kwantowe układy otwarte

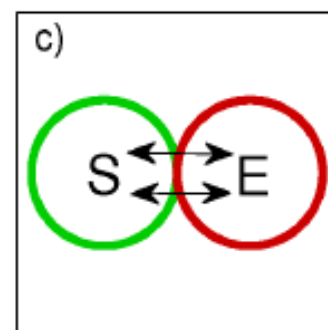
i własności widmowe nieunitarnych operatorów ewolucji



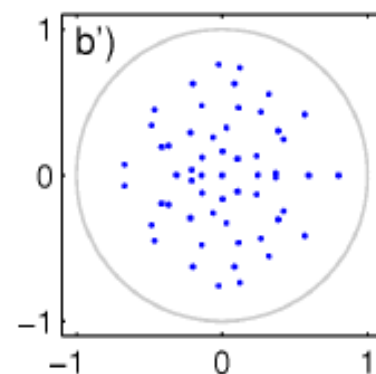
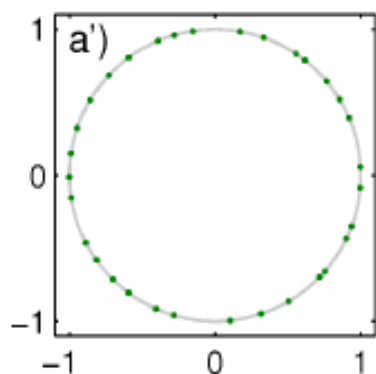
closed...



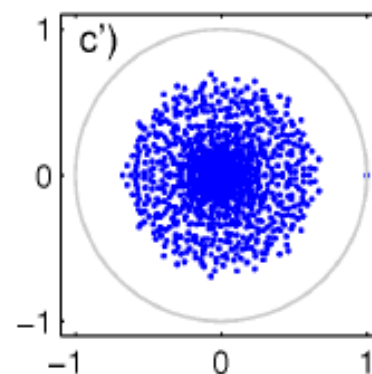
open...



interacting systems

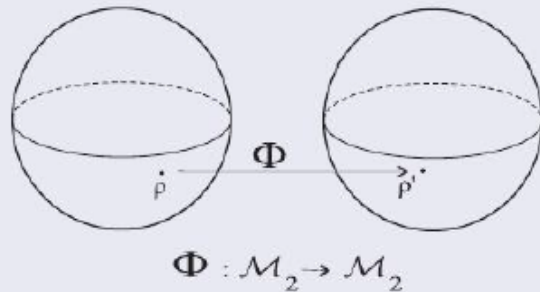


corresponding spectra



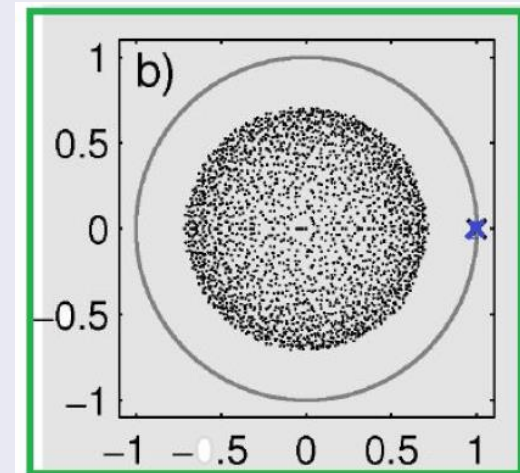
# Dyskretna ewolucja w czasie układu kwantowego

Operacja kwantowa: liniowe, całkowicie dodatnie przekształcenie macierzy gęstości  $\rho$  o wymiarze  $N$  zachowujące jej ślad



$$\rho' = \Phi(\rho) = \text{Tr}_E[U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger],$$

gdzie  $U$  to unitarna macierz sprzeżenia,  $UU^\dagger = \mathbb{1}_{KN}$ , a  $\sigma$  to początkowy stan otoczenia  $E$  o wymiarze  $K$ .



**typowe widmo superoperatora  $\Phi$  :**  
**odpowiada rzeczywistej macierzy**  
**losowej zespołu Ginibre'a:**



**Ewolucja w czasie dyskretnym i ciągłym:  
własności spektralne:  
porównanie **pomarańczy** i **cytryny****

# Dynamika Lindblada w czasie ciągłym

## a) układ zamknięty: równanie von Neumanna

$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho]$  prowadzi do **dynamiki unitarnej**,  
(odwracalny obrót zbioru macierzy gęstości):

$$\rho' = U\rho U^\dagger = e^{-iHt}\rho e^{iHt}$$

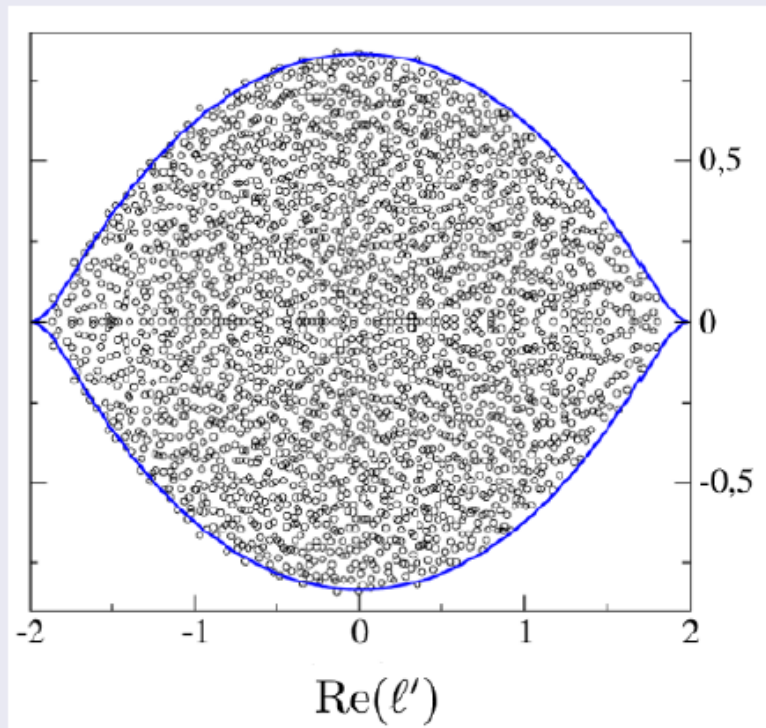
## b) układ otwarty (wymiar $N$ ) – oddziaływania z otoczeniem

opisany równaniem **Gorini - Lindblad - Kossakowski - Sudarshan**  
(1976)

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho) = \sum_{j=1}^{N^2-1} \gamma_j \left( V_j \rho V_j^\dagger - \frac{1}{2} V_j^\dagger V_j \rho - \frac{1}{2} \rho V_j^\dagger V_j \right),$$

gdzie  $\gamma_j$  to **stałe decoherencji** while its reshaped eigenvectors form normalized a  $V_j$  to **operatory przeskoku**.

## Widmo losowego operatora Lindblada $\mathcal{L}$



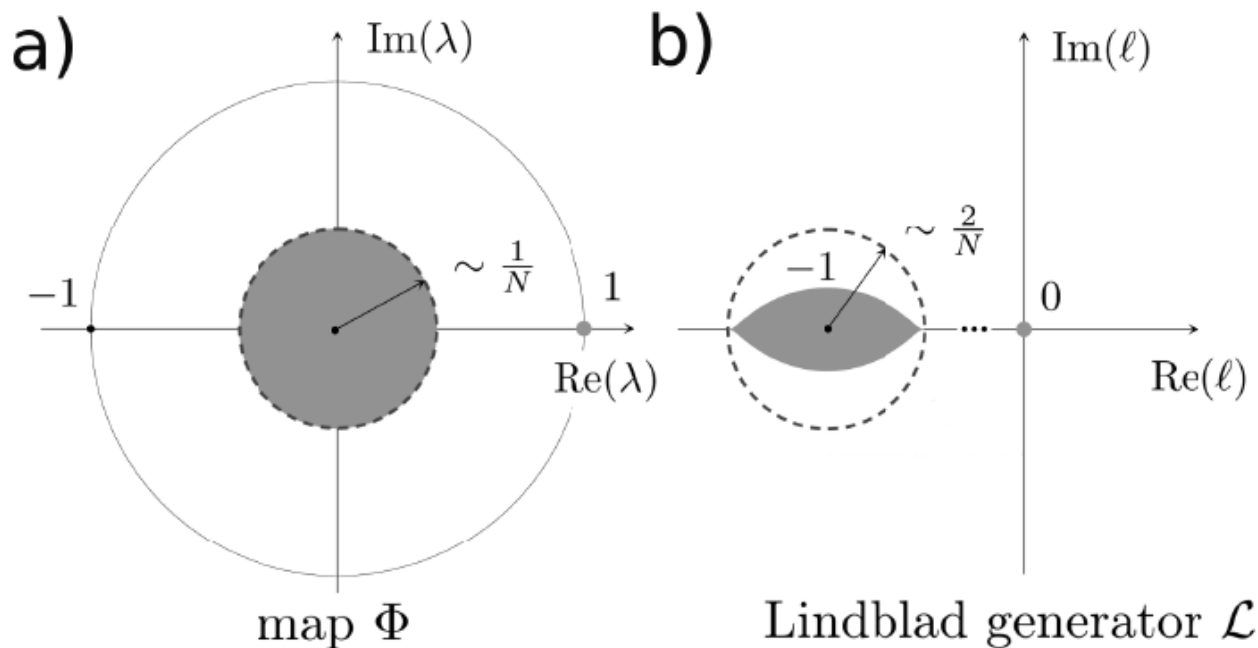
numeryczne widmo  
przeskalowanego **operatora  
Lindblada**  $\mathcal{L}' = N(\mathcal{L} + 1)$   
uzyskanego dla  $N = 50$ .

**niebieska** obwiednia zbioru  
otrzymana przy wykorzystaniu  
teorii macierzy losowych.

***Uniwersalne*** własności widma operatora  
**Lindblada** (dla przypadku typowego)

# Superoperator $\Phi$ oraz generator Lindblada $\mathcal{L}$

a) widmo losowej operacji kwantowej  $\Phi$  składa się z wiodącej wartości własnej  $\lambda_1 = 1$  oraz dysku wartości własnych o promieniu  $R \sim 1/N$



b) widmo losowego generatora Lindblada przybliżamy  $\mathcal{L} \approx \Phi - \mathbb{I} + X$ , a **człon dodatkowy**  $X = H_{GOE} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \bar{H}_{GOE}$  odpowiada za przejście

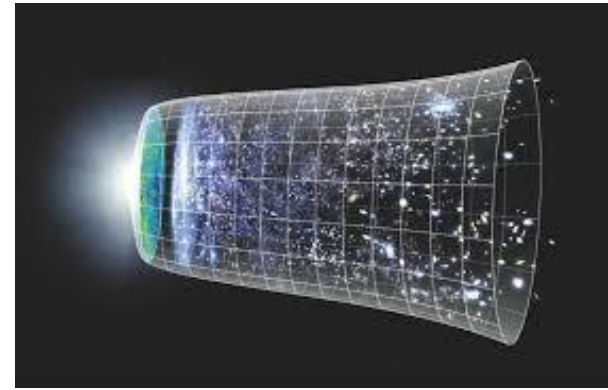
**dysk**  $\rightarrow$  **cytryna**

S. Denisov, T. Lapteva, W. Tarnowski, D. Chruściński, K.Ż,

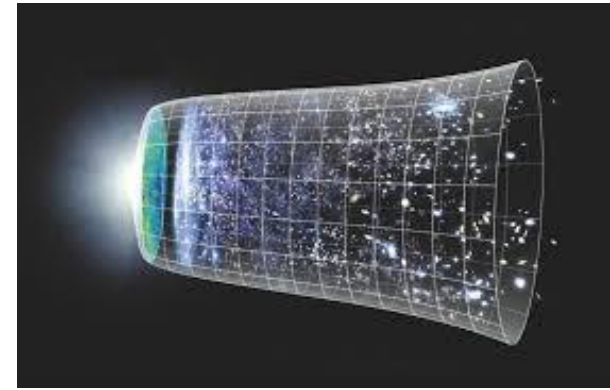
arXiv:1811.12282, *Phys. Rev. Lett.* 2019

# Uwagi końcowe:

1. Wszechświat się rozszerza...



# Uwagi końcowe:



1. Wszechświat się rozszerza...

**Fizyka także !**

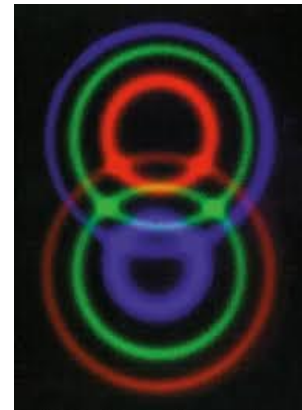
2. Wiele centralnych problemów pozostaje **otwartych**  
**gravitacja kwantowa** - <http://jurekfest.fuw.edu.pl>

*Isolated horizons... UW, 16-20.09.2019*

3. Na pograniczu fizyki też jest wiele do

zrobienia: teoria **informacji kwantowej**

$\langle KC|K \rangle$  Gdańsk - <http://www.kcik.ug.edu.pl>



4. Warto korzystać z dobrych narzędzi

stworzonych przez matematyków. Można je  
stosować w (*prawie*) każdej dziedzinie wiedzy.

5. **Macierze losowe** są dobre na każdą okazję !