

**Wybrane zadania z fizyki – na podstawie
analizy wyników Olimpiady o Diamentowy
Indeks AGH**

(z czym uczniowie i studenci mają problemy
podczas rozwiązywania zadań z fizyki)

Współpracownicy:

Paweł Armatys (+ konsultacja zadań)

Andrzej Baczmański

Andrzej Bombik

Jacek Nizioł

Jan Kulka

Lucjan Pytlik (+ układanie zadań)

Radosław Strzałka

Roman Wawszczak

Bartłomiej Wiendlocha

Marcin Wroński

Sebastian Wroński

X Ogólnopolska Olimpiada „O Diamentowy Indeks AGH”, 2016/2017

matematyka + fizyka + chemia + geografia

Etap I – 170 miast – 2566 uczestników

Etap II – 158 miast – 2286 uczestników

Etap III – 95 miast – 567 uczestników z 150 szkół

Laureaci – 429 osób

Możliwość wpływu na standaryzację wymagań
poprzez wydanie książkowe rozwiązań

Mechanika

ROZWIĄZANIE

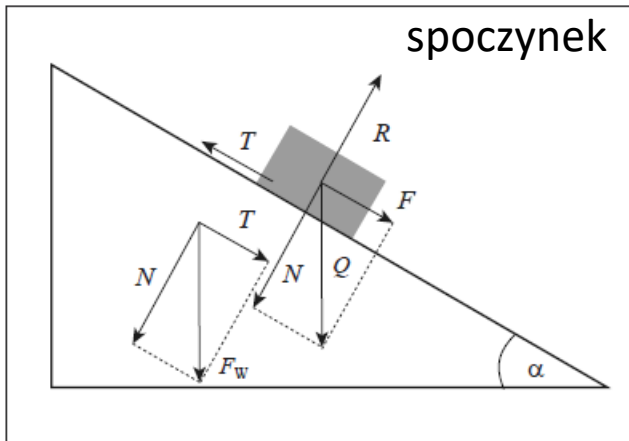
Dane: $m = 0,2 \text{ kg}$, $f = 1$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$

Szukane: α_{\min} , T_1 , $T_{\text{kłina}}$, F_w

Kąt minimalny:

$$F = T = f \cdot N \Rightarrow f = \frac{F}{N} = \text{tg } \alpha_{\min} \quad (9)$$

$$\text{tg } \alpha_{\min} = f = 1 \Rightarrow \alpha_{\min} = 45^\circ \quad (10)$$



a)

$\alpha_1 = 30^\circ < 45^\circ \Rightarrow$ ciało pozostaje w spoczynku (tarcie statyczne)

$$T = F = mg \sin \alpha = 0,2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ N} \quad (11)$$

$$T_{\text{kłina}} = 0; \quad F_w = Q = mg = 2 \text{ N} \quad (12)$$

b)

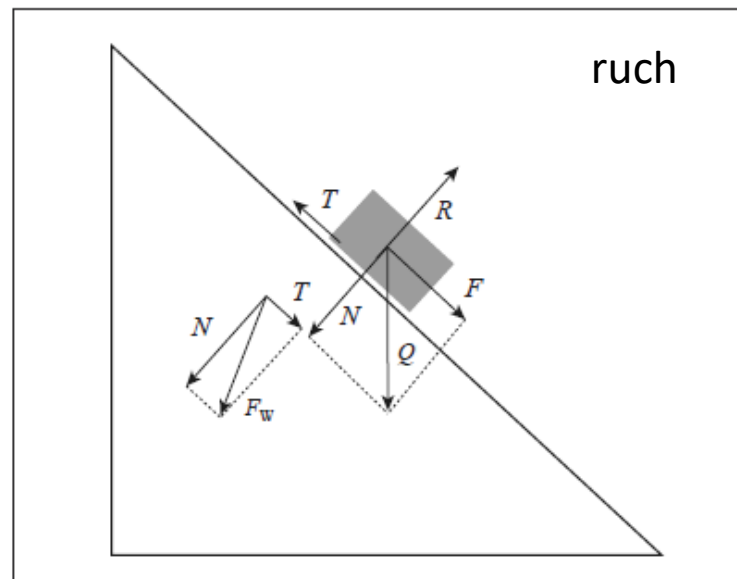
$\alpha_2 = 60^\circ > 45^\circ \Rightarrow$ ciało zsuwa się po klinie (tarcie kinetyczne)

$$T = fN = fmg \cos \alpha = 1 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{kłina}} &= N \sin \alpha_2 - T \cos \alpha_2 = mg \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 - fmg \cos \alpha_2 \cos \alpha_2 = \\ &= mg \cos \alpha_2 (\sin \alpha_2 - f \cos \alpha_2) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \approx 0,37 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_w &= \sqrt{T^2 + N^2} = \\ &= \sqrt{f^2 (mg)^2 \cos^2 \alpha_2 + (mg \cos \alpha_2)^2} = \\ &= mg \cos \alpha_2 \sqrt{f^2 + 1} = \sqrt{2} \text{ N} \quad (15) \end{aligned}$$

Oddziaływanie ciała: ciało na nieruchomej równi 2016/17-III-2



Skuter ciągnie sanie na stoku

2013/14-I-1

Maksymalne przyspieszenie układu liczymy z równania ruchu:

$$(M + m) \cdot a_{\max} = T_{1\max} - F_1 - F_2 - T_2 = f \cdot Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha - mg \sin \alpha - mgf \cos \alpha$$

gdzie $T_{1\max}$ jest maksymalną wartością tarcia statycznego dla gąsienic skutera:

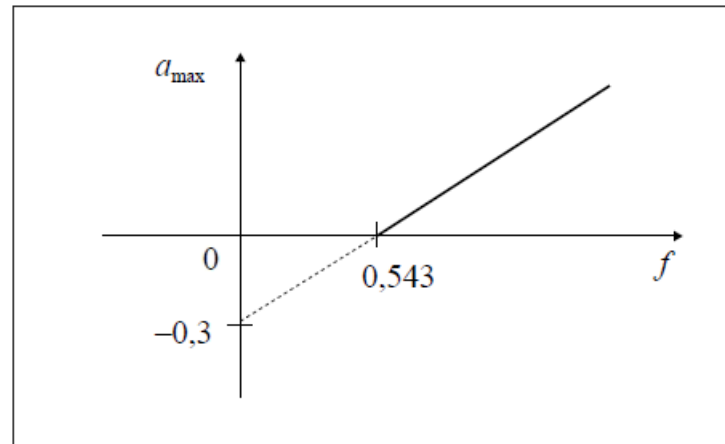
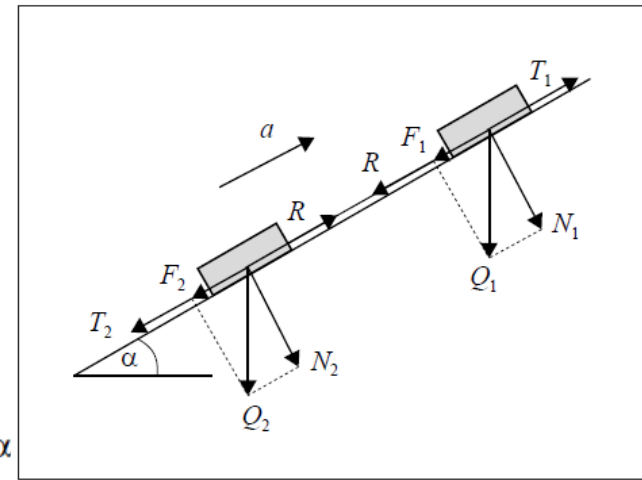
$$a_{\max} = f \cdot \frac{M}{M + m} g \cos \alpha - g \frac{M \sin \alpha + m \sin \alpha + km \cos \alpha}{M + m} \quad (2)$$

$$a_{\max} = g \cdot \left(f \cdot \frac{200}{350} \cos 15^\circ - \frac{350 \sin 15^\circ + 0,1 \cdot 150 \cos 15^\circ}{350} \right) = g \cdot (0,552f - 0,3) \quad (3)$$

Minimalna wartość współczynnika tarcia odpowiada miejscu zerowemu zależności $a_{\max}(f)$ (patrz rysunek):

$$f_{\min} = 0,543 \quad (4)$$

Ruch jest możliwy przy dowolnej masie skutera. Im mniejsza jest masa skutera, tym większy musi być minimalny współczynnik tarcia (f_{\min}).



Szpulka spoczywająca na platformie 2014/15-III-1

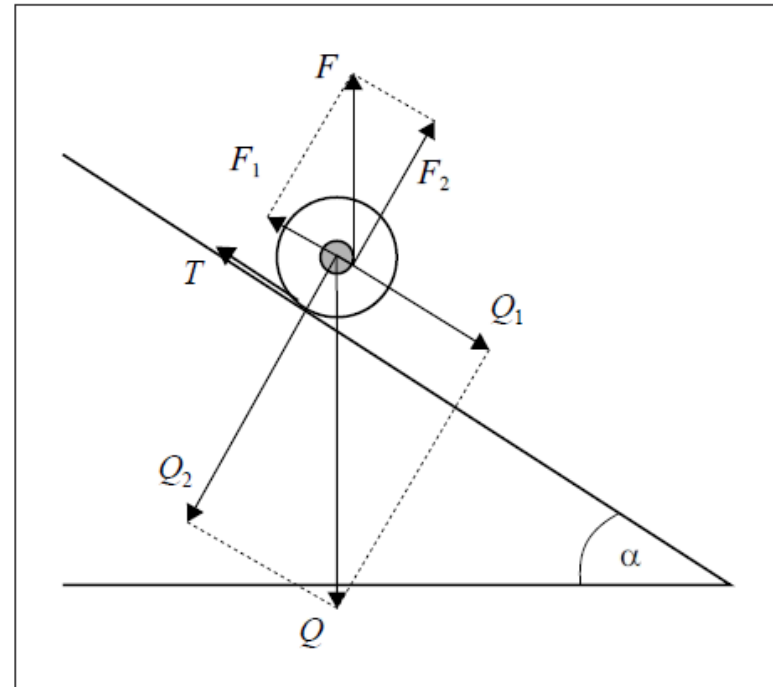
$$\begin{cases} F_1 + T - Q_1 = 0 & \text{– równowaga sił} \\ Fr = TR & \text{– równowaga momentów sił} \\ T \leq fN = f(Q_2 - F_2) \end{cases}$$

$$F = \frac{Q \sin \alpha}{\sin \alpha + r/R} = \frac{3}{7} Q = 0,96 \text{ N}$$

$$f \geq \frac{T}{N} = \frac{Q_1 - F_1}{Q_2 - F_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lub:

$$f \geq \frac{Qr \operatorname{tg} \alpha}{(Q - F)(R \sin \alpha + r)} = \frac{r/R \operatorname{tg} \alpha}{\left(1 - \frac{F}{Q}\right) \left(\sin \alpha + \frac{r}{R}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Szpulka na równi pochyłej wciągana do góry ruchem jednostajnym bez poślizgu 2015/16-III-1

Równowaga sił:

$$F = Q_1 + T$$

Równowaga momentów sił (względem środka szpulki):

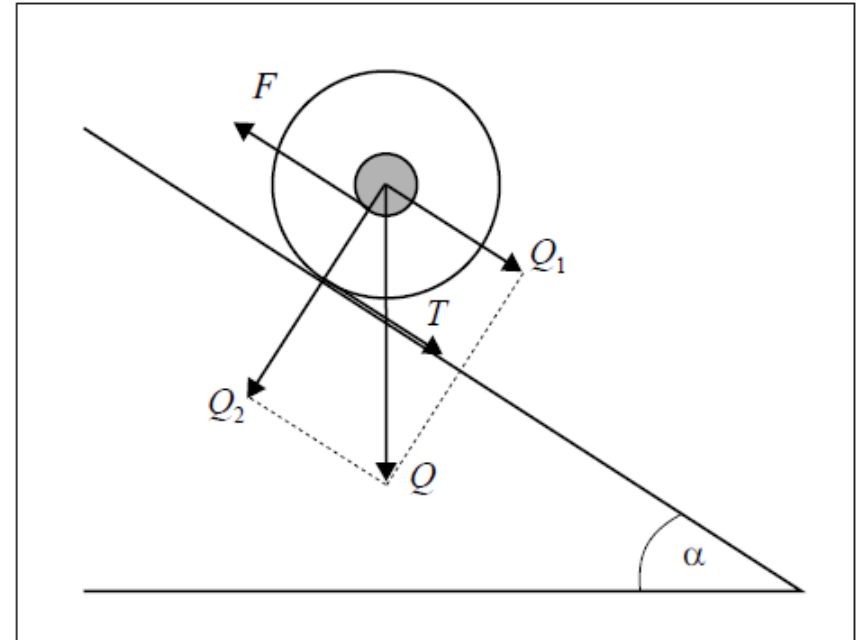
$$T \cdot R = F \cdot r \Rightarrow T = F \cdot \frac{r}{R}$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy po przekształceniach:

$$F = \frac{Q \sin \alpha}{1 - \frac{r}{R}} = 1 \text{ N}$$

Ostatecznie:

$$f_{\min} = \frac{T}{Q_2} = \frac{\text{tg} \alpha}{\frac{R}{r} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$$



Moment bezwładności walca:

$$I_1 = \frac{1}{2}mr^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment bezwładności krążka:

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment bezwładności szpulki:

$$I = I_1 + 2I_2 = 5,05 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{cases} Q - N = (m + 2M) \cdot a \\ r \cdot N = I \cdot \varepsilon \\ \varepsilon = \frac{a}{r} \end{cases}$$

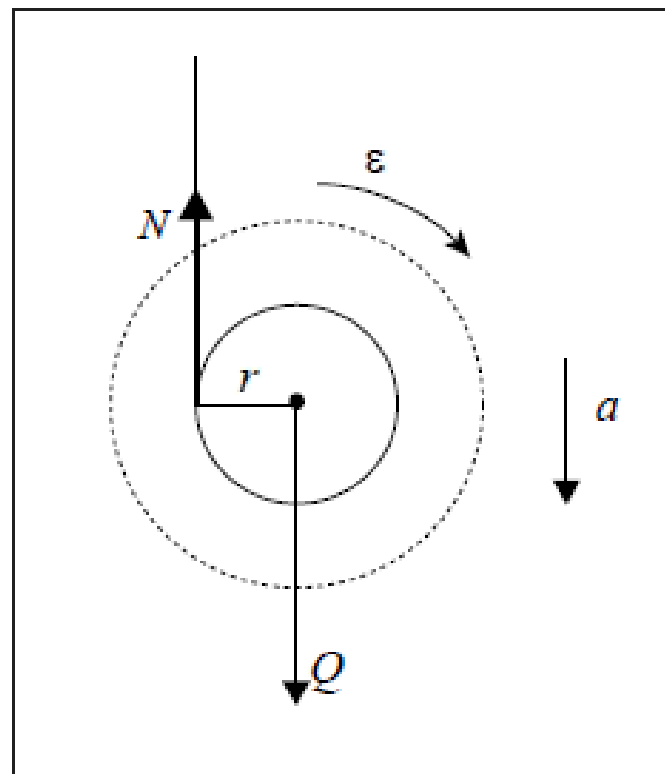
Stąd:

$$a = \frac{m + 2M}{m + 2M + \frac{I}{r^2}} \cdot g = 0,09g = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = 90 \frac{1}{\text{s}^2}$$

Szpulka na nitce: Yo-Yo

2015/16-I-2



Równowaga: na koniec wystającego kija siada ptak 2012/13-II-2

Warunkiem koniecznym, aby układ pozostawał w spoczynku, jest równowaga wszystkich sił oraz równowaga momentów sił względem dowolnej osi obrotu. Dla rozpatrywanego przypadku oznacza to, że środek masy układu ciał leży na stole.

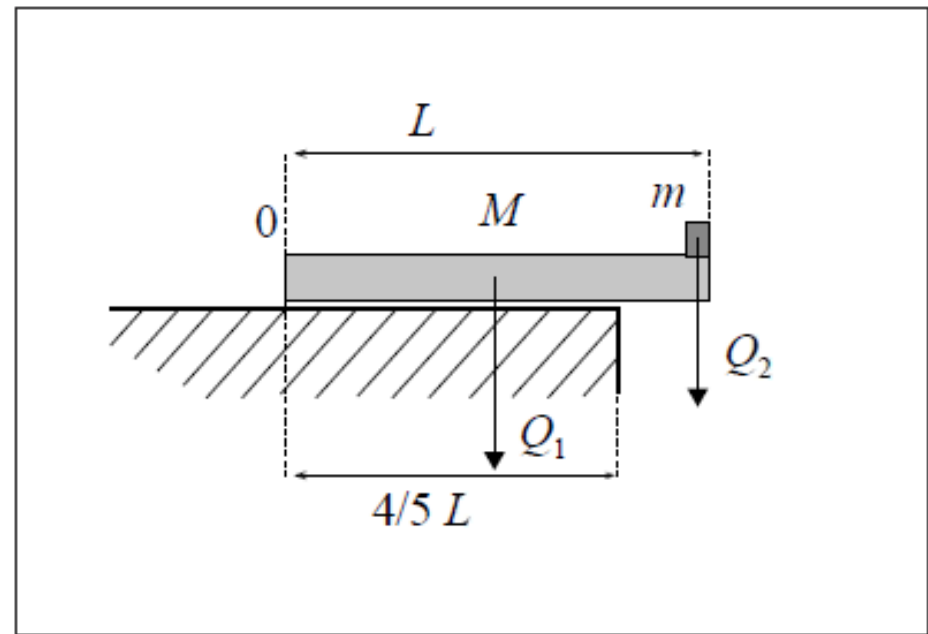
$$x_{\text{CM}} = \frac{M \cdot L/2 + mL}{M + m} = \frac{M/2 + m}{M + m} L$$

Warunek „katastrofy”:

$$x_{\text{CM}} > \frac{4}{5} L$$

Zatem:

$$\frac{M/2 + m}{M + m} L > \frac{4}{5} L \Rightarrow m > \frac{3}{2} M = 0,6 \text{ kg}$$



Spoczywający walec przy ścianie 2015/16-II-2

Taśma mocująca styczna do walca

$$\begin{cases} F_1 + T = Q \\ R \cdot F = R \cdot T \Rightarrow T = F \end{cases}$$

$$F_1 = F \cdot \cos \alpha; \quad F_2 = F \cdot \sin \alpha$$

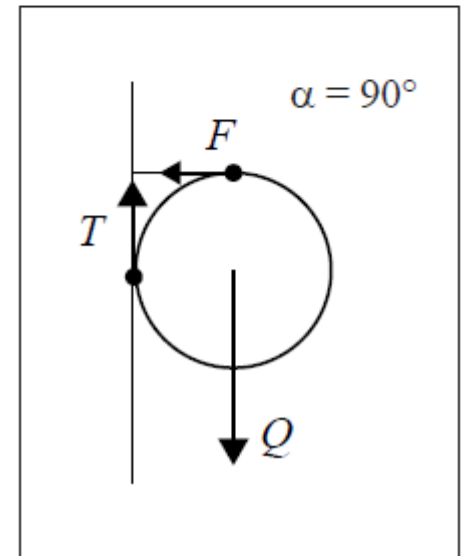
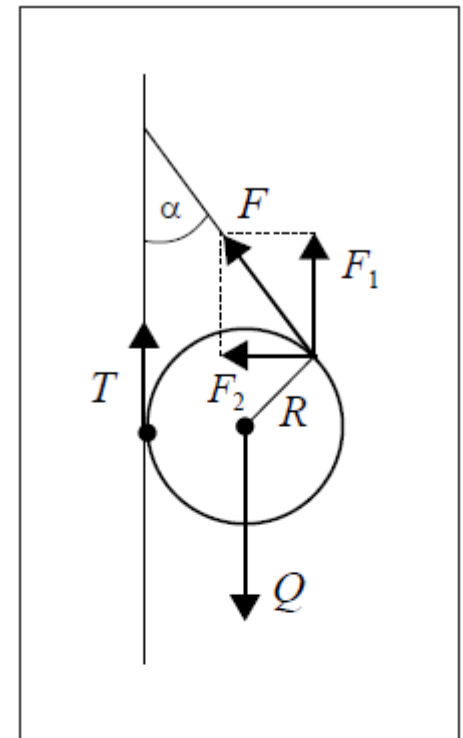
$$F \cdot \cos \alpha + F = Q \Rightarrow F = \frac{Q}{1 + \cos \alpha}$$

$$T \leq f \cdot F_2 \Rightarrow F \leq f \cdot F \cdot \sin \alpha$$

Stąd

$$f \geq \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\text{dla } \alpha = 90^\circ: \quad f \geq 1.$$



Układy o zmiennej masie - rakieta, 2015/16-III-2

Korzystamy z zasady zachowania pędu dla chwil t i $t + \Delta t$:

$$Mv = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u)$$

$$Mv = Mv + M\Delta v - v\Delta m - \Delta m\Delta v + v\Delta m - u\Delta m$$

Po redukcji wyrazów i zaniedbaniu składnika $(\Delta m \cdot \Delta v)$ otrzymujemy:

$$M\Delta v = u \cdot \Delta m = u \cdot \mu \cdot \Delta t$$

Stąd:

$$F_c = M \cdot a = M \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu \cdot u \quad (\text{wzór Ciolkowskiego})$$

Aby unieść raketę:

$$F_c = Q = M_0 \cdot g$$

Stąd:

$$\mu = \frac{Q}{u} = \frac{M_0 \cdot g}{u} = 50 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Układy o zmiennej masie - siła odrzutu

Dla **stałej masy !!!**: $\frac{dp}{dt} = F_{zew}$; $m(t) = m_0 - \mu t$; $v_2 = v_1 - u$

u - szybkość wyrzutu spalin

μ - szybkość spalania masy

m_1 - masa rakiety

m_2 - masa wyrzuconych spalin

$m_1 + m_2 = \text{const}$

$$\frac{d}{dt} (m_1 v_1 + m_2 v_2) = -\mu v_1 + m_1 \dot{v}_1 + \mu v_2 + m_2 \dot{v}_2 = (m_1 + m_2) \dot{v}_1 - \mu u = 0$$

Stąd dla układu o **zmiennej masie** obowiązuje ogólne równanie:

$$m\dot{v} = F_{zew} + F_{odrz} \quad !!!$$

gdzie dla układu dwóch ciał: $F_{odrz} = \mu u$

Podziękowania dla Wilhelma Czaplińskiego

$$m\dot{v} = F_{zew} + F_{odrz}$$

I. **Rakieta** ($F_{zew} = 0$; $F_{odrz} = \mu u$; $m = m_0 - \mu t$):

zatem: $(m_0 - \mu t)\dot{v} = \mu u$ = stała siła ciągu rakiety (wzór Ciołkowskiego)

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$$

II. **Barka na którą sypie się piasek z góry** ($u = v$; $m = m_0 + \mu t$; $F_{odrz} = -\mu u$)

stąd: $(m_0 + \mu t)\dot{v} = F_{zew} - \mu v$

$$v = \frac{F_{zew}t}{m} = \frac{F_{zew}t}{m_0 + \mu t}$$

III. **Barka z której wysypuje się piasek** ($u = 0$; $m = m_0 - \mu t$; $F_{odrz} = 0$)

stąd: $(m_0 - \mu t)\dot{v} = F_{zew}$

$$v = \frac{F_{zew}}{\mu} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = \frac{F_{zew}}{\mu} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$$

IV. Różne kombinacje z sypiącym się piaskiem na barkę i z barki.

Układy nieinercyjne, ciało na ruchomym klinie, 2010/11-I-1

W układzie klina (nieinercyjnym) na klocek działają siły: ciężkości (Q) i bezwładności (F_b). Różnica składowych prostopadłych do równi jest równoważona siłą reakcji podłoża, a więc siła nacisku klocka na klin wynosi N :

$$N = Q_2 - F_{b2} = m (g \cos \alpha - a_k \sin \alpha) \quad (1a)$$

Składowa N_1 siły nacisku powoduje ruch klina, zatem:

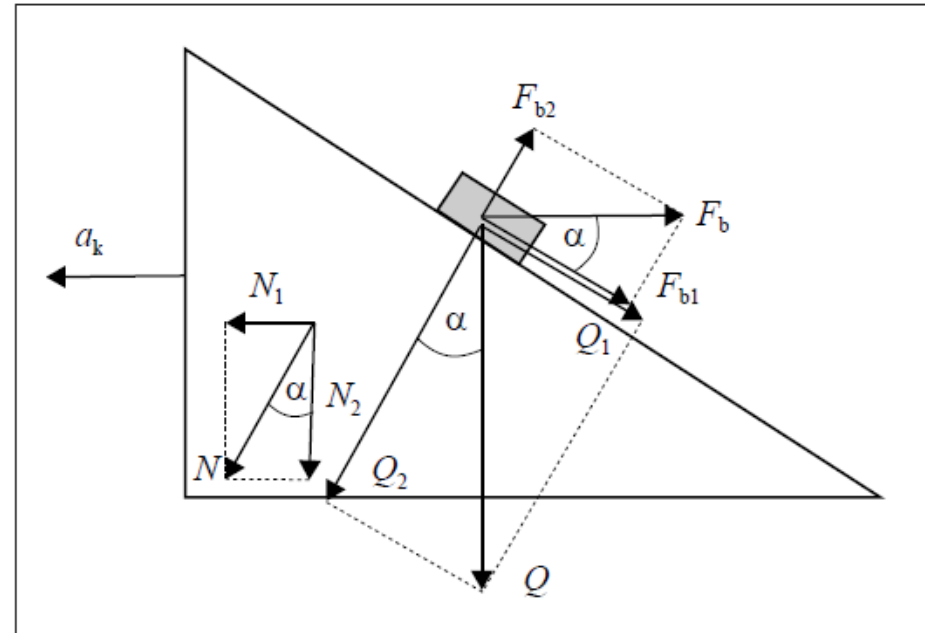
$$M \cdot a_k = N_1 = N \cdot \sin \alpha \quad (1b)$$

Rozwiązując układ równań (1a)(1b), otrzymujemy:

$$a_k = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = \frac{g \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2 \alpha} \approx 1 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{Jeżeli } \frac{M}{m} \rightarrow \infty \Rightarrow a_k \rightarrow 0$$

$$\text{Jeżeli } \frac{M}{m} \rightarrow 0 \Rightarrow a_k = g \operatorname{ctg} \alpha$$



Ciało na ruchomym klinie – warto przerobić następujące przypadki:

1. Dołożyć siłę tarcia między ciałem a klinem
2. Ruch obrotowy, np. ruch kulki na klinie (bez poślizgu lub z poślizgiem)
3. Uwzględnić siłę tarcia klina o podłoże.

Wirujące ciało zamocowane do osi obrotu na dwóch sznurkach, 2009/10-III-1

$$\begin{cases} N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha = F_d \\ N_1 \cdot \sin \alpha - N_2 \cdot \sin \alpha = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_d}{\cos \alpha} + \frac{Q}{\sin \alpha} \right) \\ N_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_d}{\cos \alpha} - \frac{Q}{\sin \alpha} \right) \end{cases}$$

Siła dośrodkowa:

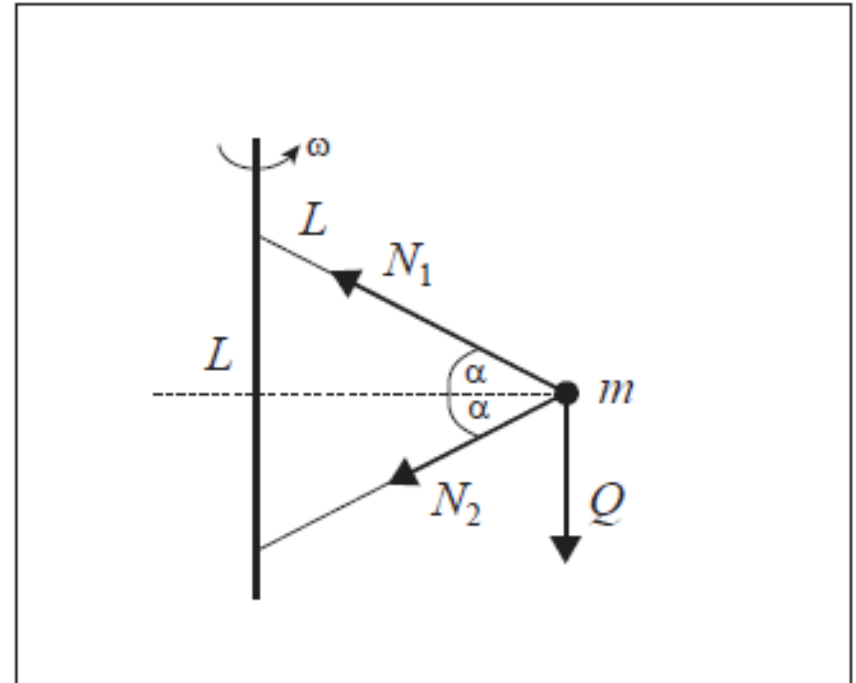
$$F_d = m\omega^2 R = m4\pi^2 f^2 \cdot L \cos \alpha$$

Zatem:

$$N_1 = \frac{m}{2} \left(4\pi^2 f^2 \cdot L + \frac{g}{\sin \alpha} \right)$$

$$N_2 = \frac{m}{2} \left(4\pi^2 f^2 \cdot L - \frac{g}{\sin \alpha} \right), \quad N_1 > N_2$$

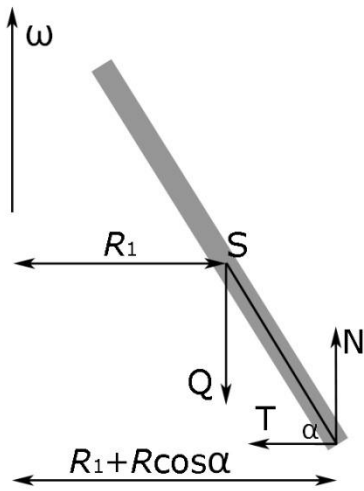
$$N_1 = N_{\max} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} \cdot \sqrt{\frac{2N_{\max}}{m} - \frac{g}{\sin \alpha}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,25}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,1} - \frac{10}{1/2}} = 4,27 \text{ Hz}$$



Ruch żyroskopowy krążka nachylonego pod kątem α do poziomu.

m – masa krążka; R – promień krążka

Obrót względem środka masy S

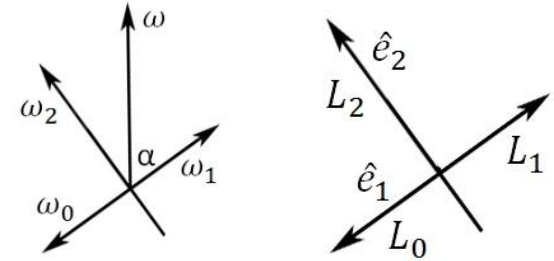


$$N = Q = mg$$

$$T = F_{\text{dośr}} = m\omega^2 R_1$$

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$R\omega_0 = \omega(R_1 + R \cos \alpha)$$



– równanie precesji

– ruch bez poślizgu

Osie główne: $I_1 = \frac{1}{2}mR^2[\hat{e}_1]$, $I_2 = \frac{1}{4}mR^2[\hat{e}_2]$; Moment siły: $M = NR \cos \alpha - TR \sin \alpha$:

$$\vec{L} = (L_0 - L_1)\hat{e}_1 + L_2\hat{e}_2 = (\omega_0 - \omega_1)I_1\hat{e}_1 + \omega_2 I_2\hat{e}_2$$

Po przekształceniach równania $|\vec{M}| = |\vec{\omega} \times \vec{L}|$ otrzymujemy:

$$g \operatorname{ctg}(\alpha) = \omega^2 \left[\frac{I_2}{mR^2} R \cos \alpha + \left(1 + \frac{I_1}{mR^2} \right) R_1 \right] = \omega^2 \left[\frac{1}{4} R \cos \alpha + \frac{3}{2} R_1 \right]$$

Jeżeli $\alpha = \pi/2$ to dostajemy: $0 = \omega^2 R_1 \Rightarrow$ dwa rozwiązania:

1/ $\omega = 0$ (ruch po linii prostej, $R_1 = \infty$)

2/ $R_1 = 0$ (wirowanie krążka względem średnicy)

Jeżeli $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$ (obserwowane jako podbicie częstotliwości)

Ruch obrotowy: przewracający się pręt 2010/11-II-2

Równanie ruchu obrotowego:

$$I \cdot \varepsilon = M = mg \frac{l}{2} \sin \alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g}{2l} \sin \alpha \quad (5)$$

Zasada zachowania energii pozwala przyrównać początkową energię potencjalną do energii całkowitej w dowolnym momencie ruchu:

$$mg \frac{l}{2} = I \frac{\omega^2}{2} + mg \frac{l}{2} \cos \alpha \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l} (1 - \cos \alpha)$$

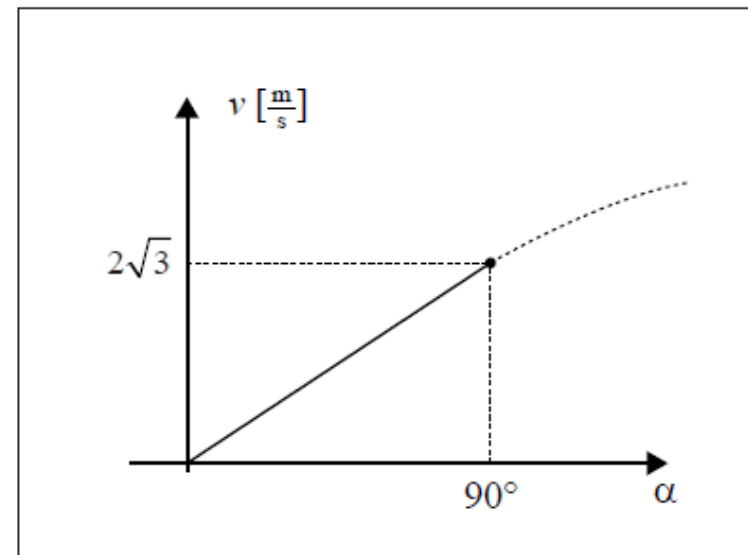
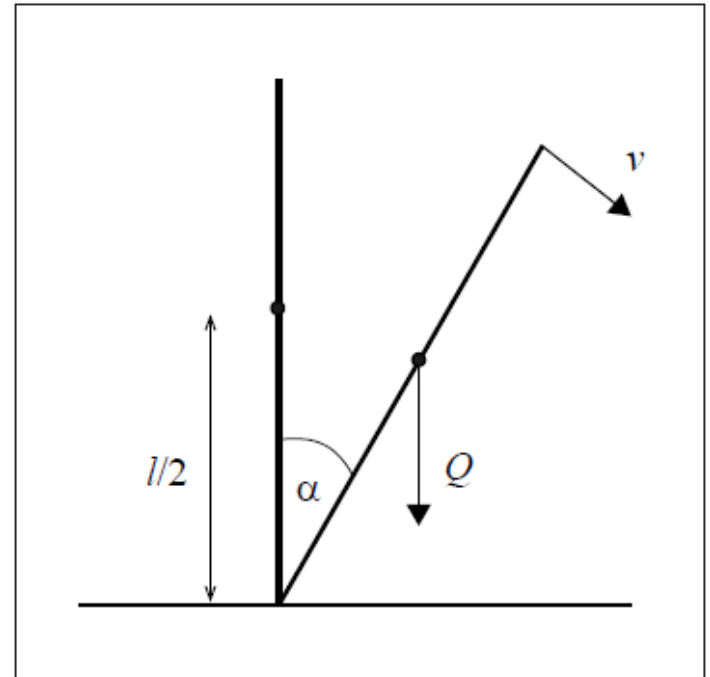
$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Prędkość liniowa górnego końca pręta:

$$v = \omega \cdot l = \sqrt{6gl} \sin \frac{\alpha}{2} \approx 2\sqrt{6} \sin \frac{\alpha}{2} \text{ [m/s]}$$

Prędkość maksymalną liczymy dla $\alpha = 90^\circ$:

$$v_{\max} = 2\sqrt{6} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ [m/s]} \quad (9)$$

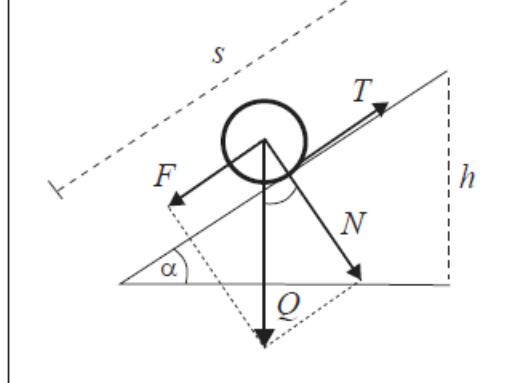


Szukane: $v(\alpha)$

a) Ruch bez poślizgu

Zapisujemy równania dynamiki i wykorzystując wszystkie informacje, liczymy przyspieszenie:

$$\begin{cases} ma = mg \sin \alpha - T \\ T \cdot R = I \cdot \varepsilon \\ a = \varepsilon \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = ma = \frac{1}{2} mg \sin \alpha \\ a = \frac{1}{2} g \sin \alpha \end{cases} \quad (6)$$



Prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym możemy obliczyć jako ($s = h/\sin \alpha$ – długość równi, v_0 – prędkość osiągnięta w spadku swobodnym z wysokości h):

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{gh} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \approx 0,7 v_0 \quad (7)$$

Widzimy, że w przypadku ruchu bez poślizgu prędkość końcowa obręczy nie zależy od kąta nachylenia równi do poziomu.

b) Ruch z poślizgiem

Wzory na siłę tarcia i przyspieszenie przyjmują postać.

$$T = fmg \cos \alpha \Rightarrow a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (8)$$

Tym razem prędkość końcowa będzie zależeć od kąta:

$$v = \sqrt{2gh(1 - f \operatorname{ctg} \alpha)} = v_0 \sqrt{1 - f \operatorname{ctg} \alpha} \quad (9)$$

Obok przedstawiamy wykres zależności prędkości końcowej od kąta nachylenia równi do podłoża.

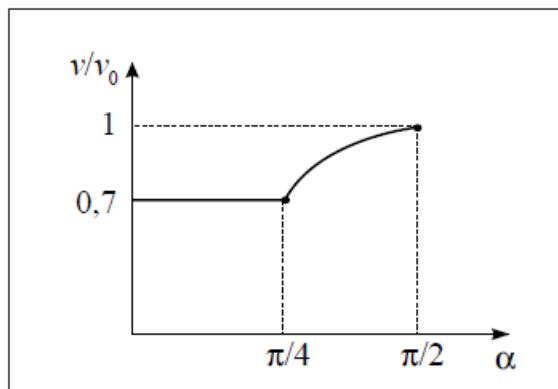
Kąt graniczny:

$$T = ma \leq fmg \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{gr}} = 2f \quad (10)$$

$$\alpha_{\text{gr}} = \frac{\pi}{4}$$

Ruch obrotowy bez poślizgu lub z poślizgu dla obręczy 2008/9-II-2



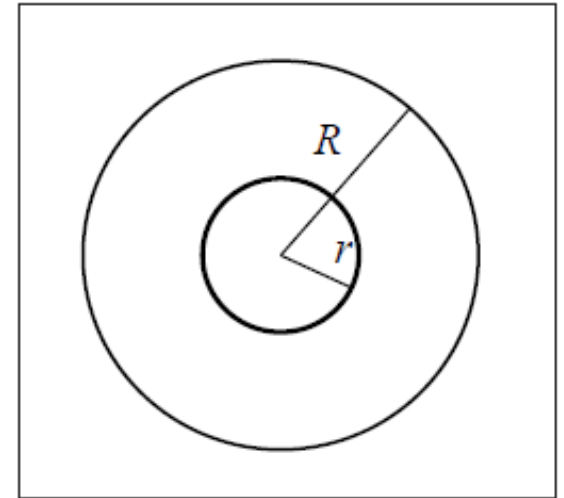
Dwa walce o różnych rozkładach masy 2012/13-I-1

$$I_{\text{walca}} = \frac{1}{2}mr^2, \quad I_{\text{tulei}} = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) \quad \mu \equiv \rho_{\text{Pb}}/\rho_{\text{Al}} = 4,2$$

$$m_{\text{Al}} = m_{\text{Pb}} = m \Rightarrow \pi r_A^2 \cdot d \cdot \rho_{\text{Al}} = \pi(R_A^2 - r_A^2) \cdot d \cdot \rho_{\text{Pb}}$$

$$r_A^2 = \frac{\mu}{1+\mu}R^2, \quad I_A = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{2\mu}{1+\mu} \right) \cdot R^2 = \frac{1}{4}MR^2 \frac{1+3\mu}{1+\mu}$$

$$r_B^2 = \frac{1}{1+\mu}R^2, \quad I_B = \frac{1}{4}MR^2 \frac{\mu+3}{1+\mu}, \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{3\mu+1}{\mu+3} \approx 1,89$$



Ogólnie dla walca:

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/R^2}}, \quad t = \frac{2s}{v}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{8gh(1+\mu)}{5+7\mu}}, \quad v_B = \sqrt{\frac{8gh(1+\mu)}{7+5\mu}}, \quad \frac{t_A}{t_B} = \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{7\mu+5}{5\mu+7}} \approx 1,11$$

Grawitacja: rachunek księżycowy

2016/17-I-1

$$R_{ZK} \cong 60 R_K$$

Przyspieszenie dośrodkowe Księżyca:

$$a_{dk} = \omega^2 R_{ZK} = \left(\frac{2\pi}{T_K} \right)^2 \cdot R_{ZK} = 2,72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{a_{dk}}{g} \approx \frac{1}{(60)^2} = \frac{1}{(R_{ZK}/R_Z)^2} \quad \text{– stąd dostajemy prawo powszechnego ciążenia}$$

$$a_{dk} = \frac{GM_Z}{R_{ZK}^2}$$

Dla $R = 2 R_Z$

$$a_d = \frac{g}{(R/R_Z)^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{gR_Z^2} = \frac{4\pi^2}{GM_Z} = \text{const}$$

Wzór (4) jest zapisem trzeciego prawa Keplera.

Zatem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{gR_Z^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{8R_Z}{g}} = 14,3 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 4 \text{ godz.}$$

Manewr lądowania satelity na Ziemi 2011/12-III-2

A.

$$F_g = F_{\text{dośr}} \Rightarrow G \frac{M_Z m}{R_0^2} = \frac{m v_0^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = G \frac{M_Z}{v_0^2}$$

$$\frac{R_0}{R_Z} = \frac{GM_Z}{R_Z} \cdot \frac{1}{v_0^2} = \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 = 9$$

B. Zasada zachowania momentu pędu:

$$m \cdot v_A \cdot R_0 = m \cdot v_P \cdot R_Z \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{R_0}{R_Z} = 9$$

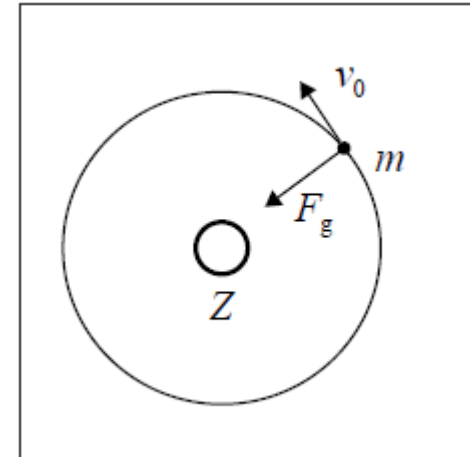
Zasada zachowania energii:

$$E_A = E_P \Rightarrow -G \frac{M_Z m}{R_0} + \frac{m v_A^2}{2} = -G \frac{M_Z m}{R_Z} + \frac{m v_P^2}{2}$$

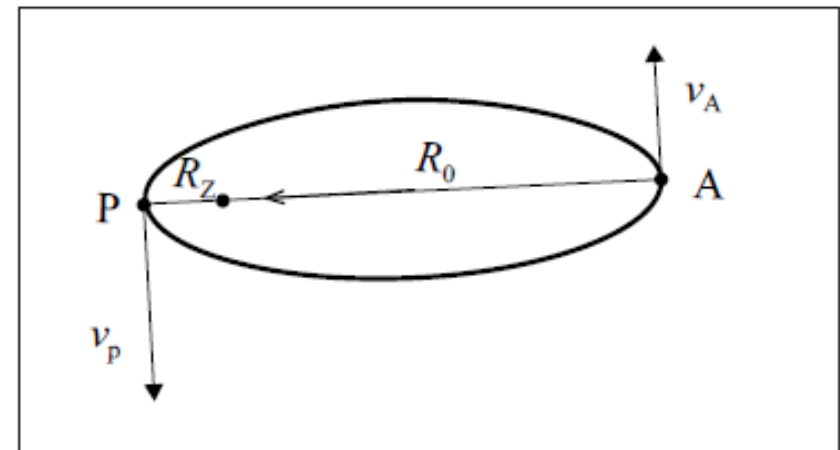
$$v_P^2 - v_A^2 = \frac{2GM_Z}{R_Z} \left(1 - \frac{R_Z}{R_0} \right) = 2v_1^2 \left(1 - \frac{1}{9} \right)$$

Co daje:

$$v_P^2 - v_A^2 = 2v_1^2 \left(\frac{8}{9} \right) \Rightarrow \begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{1}{45}} \cdot v_1 \approx 0,15 v_1 \\ v_P &= 9v_A = 1,34 v_1 \end{aligned}$$



$$v_1 = 7,9 \text{ km/s}; \quad v_0 = v_1/3$$



Międzynarodowa Stacja Kosmiczna ISS 2008/9-1-3

Siła grawitacyjna pełni rolę siły dośrodkowej w ruchu po orbicie. Na tej podstawie obliczymy prędkość orbitalną stacji:

$$F_{\text{gr}} = F_{\text{d}} \Rightarrow G \frac{M_Z m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_Z}{R}} = \sqrt{\frac{g R_Z^2}{R_Z + H}} = \sqrt{\frac{g R_Z}{1 + H/R_Z}} \approx 7,70 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (10)$$

Liczmy energię kinetyczną i potencjalną stacji:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{GM_Z m}{R} = \frac{1}{2} mg \frac{R_Z}{1 + H/R_Z} = 8,89 \cdot 10^{12} \text{ J} \quad E_p = -\frac{GM_Z m}{R} = -2E_k \quad (11)$$

Zatem całkowita energia mechaniczna oraz jej zmiana potrzebna na opuszczenie pola ziemskiego wynoszą:

$$E_c = E_k + E_p = -E_k, \quad \Delta E = E_\infty - E_c = E_k = 8,89 \cdot 10^{12} \text{ J} \quad (12)$$

Obliczamy masę lodu, jaki można by stopić, wykorzystując energię (12):

$$M_L = \frac{\Delta E}{L} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ kg} \quad (13)$$

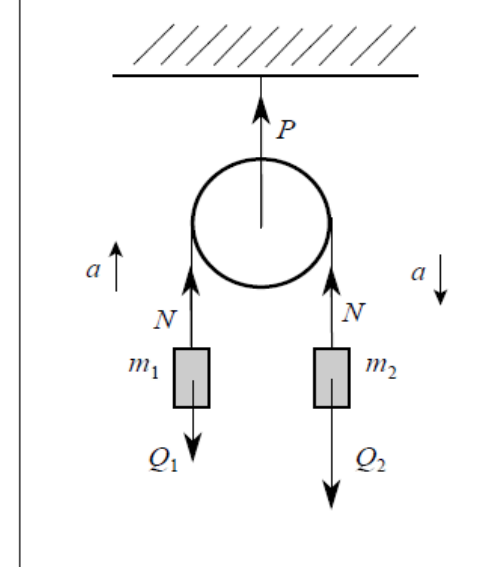
Porównujemy wynik z masą obserwowanych gór lodowych (przyjmijmy masę góry lodowej: $M_g \sim 2 \text{ Mt}$ – aktualne dane w internecie):

$$\frac{M_L}{M_g} = 1,3\% \quad (14)$$

Bloczek nieruchomy

– masa zredukowana

2007/8-II-1



Zapisujemy równania dynamiki dla obu ciał:

$$\begin{cases} m_1 a = N - Q_1 \\ m_2 a = Q_2 - N \end{cases}$$

Po dodaniu stronami obu równań układu (1) otrzymujemy przyspieszenie i naciąg liny:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \approx 3,3 \text{ m/s}^2, \quad N = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 13,3 \text{ N} \quad (2)$$

Waga wskaże ciężar:

$$P = 2N = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 26,7 \text{ N} \quad (3)$$

Uwaga:

Siła P przenosi się na zawieszenie krążka. Cały układ można zastąpić masą zredukowaną μ , wyrażoną wzorem:

$$\mu = \frac{P}{g} = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Pojęcie masy zredukowanej znacznie usprawnia obliczenia dla układów złożonych z wielu krążków.

I sposób rozwiązania:

Wiele bloczków

2014/15-I-1

Zapisujemy równanie ruchu dla mas m_1 , m_2 i m_3 :

$$\begin{cases} m_1 \cdot a_1 = Q_1 - 2N \\ m_2 \cdot a_2 = N - Q_2 \\ m_3 \cdot a_3 = N - Q_3 \\ a_2 = a_1 + a \\ a_3 = a_1 - a \end{cases} \quad (1)$$

gdzie a jest przyspieszeniem ruchu ciał m_2 i m_3 w układzie związanym z bloczkiem B.

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$a_2 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g = \frac{1}{7} g \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

II sposób rozwiązania:

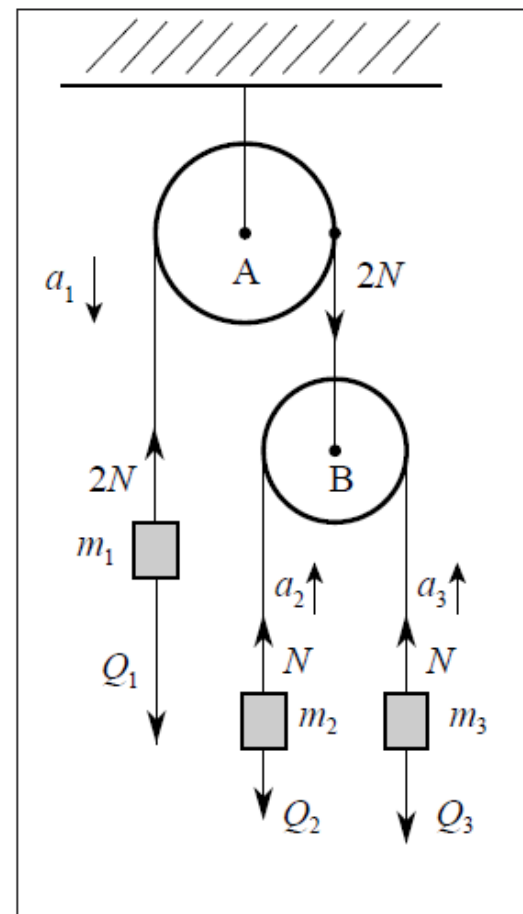
Zastępujemy bloczek B wraz z masami m_2 i m_3 masą zredukowaną μ_B (patrz zadanie 2007/2008-II-1)

$$\mu_B = \frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3} \quad (3)$$

wtedy:

$$a_1 = \frac{m_1 - \mu_B}{m_1 + \mu_B} g = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g \quad (4)$$

Jeżeli $m_2 = m_3 = m_1/2$ to $a_1' = 0$ (układ jest w równowadze).



Zderzenia – dwie piłki po zderzeniu z podłożem 2013/14-III-2

Zderzenie sprężyste kul przedstawionych na rys. A (przed zderzeniem) i rys. B (po zderzeniu)

$$\begin{cases} -mv_1 + 2mv_1 = mu_2 + 2mu_1 \\ \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_1^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{2mu_1^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = u_2 + 2u_1 \\ 3v_1^2 = u_2^2 + 2u_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1^2 - 2v_1u_1 - v_1^2 = 0 \\ u_1 = -\frac{v_1}{3} \quad \text{lub} \quad u_1 = v_1 \end{cases}$$

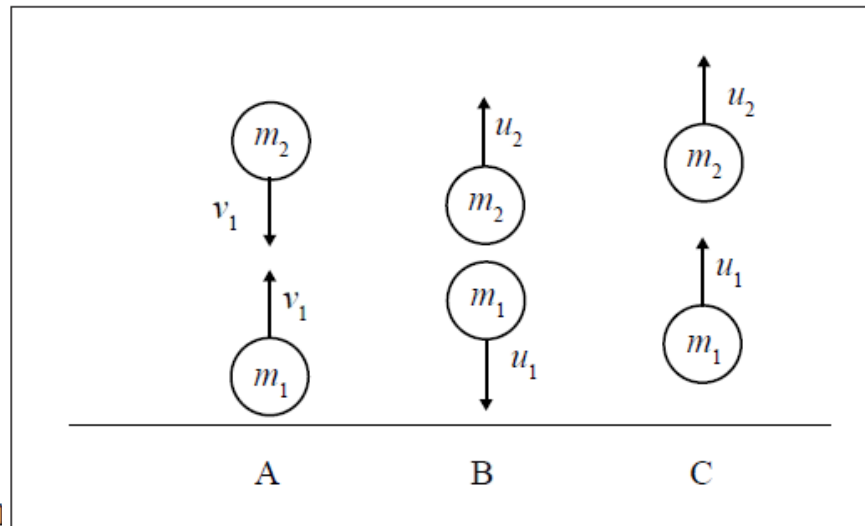
Rozwiązanie $u_1 = v_1$ odpowiada warunkom początkowym

$$\text{dla } u_1 = -\frac{v_1}{3}, \text{ to } u_2 = \frac{5}{3}v_1$$

Odpowiednie wysokości wynoszą:

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{H}{9} = \frac{1}{9} \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{25}{9} H \approx 2,8 \text{ m}$$



Oscylacje kry lodowej 2008/9-I-2

Siłę ciężkości działającą na krę obliczymy z warunku równowagi:

$$Q = F_{w0} = \rho_w \cdot S \cdot x_0 \cdot g \quad (6)$$

Obliczmy siłę wypadkową działającą na krę po wprowadzeniu jej w drgania pionowe:

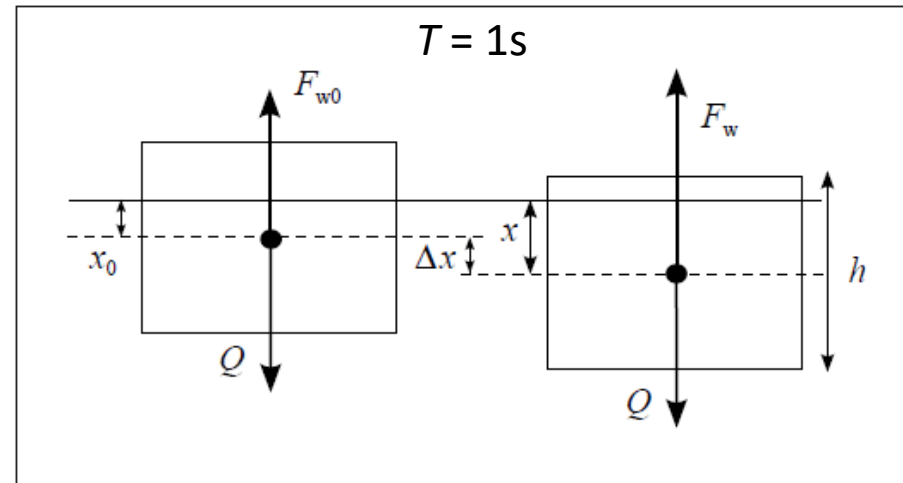
$$F = F_w - Q = \overbrace{\rho_w \cdot S \cdot g}^k \cdot \Delta x = k \cdot \Delta x \quad (7)$$

Siła wypadkowa zależy wprost proporcjonalnie od wartości wychylenia, więc jest siłą harmoniczną. Obliczmy okres drgań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \left| \frac{k = \rho_w S g}{m = \rho_l S h} \right| = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_l \cdot h}{\rho_w \cdot g}}$$

Możemy już łatwo obliczyć grubość kry lodowej:

$$h = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\rho_w}{\rho_l} \cdot g = 0,28 \text{ m} = 28 \text{ cm}$$



Wahadło fizyczne – obręcz z dodatkową masą punktową

2016/17-II-2

$$I_o = MR^2, I_1 = I_o + Md^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0,4\pi = 1,26 \text{ s}$$

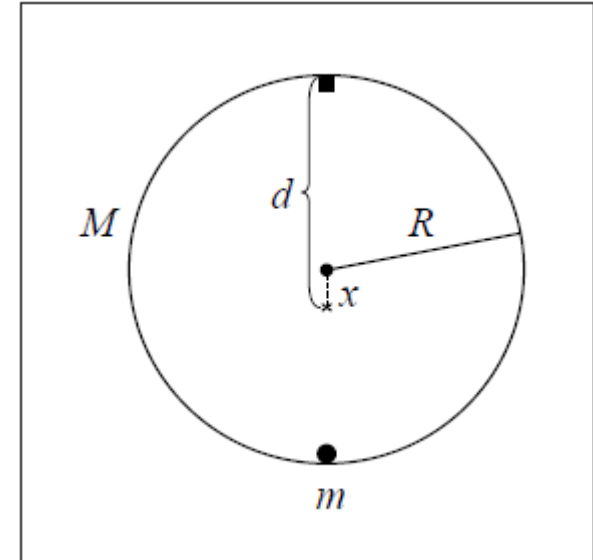
Po dołożeniu masy m :

$$I_2 = I_1 + m(2R)^2 = 2MR^2 + 4mR^2$$

Położenie środka masy:

$$x = \frac{0 \cdot M + m \cdot R}{M + m} = \frac{m}{M + m} R, \quad d = R + x = \frac{M + 2m}{M + m} \cdot R$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2R^2(M + 2m)}{\frac{M + 2m}{M + m} \cdot R(M + m)g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = T_1, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1$$



Praca siły tarcia 2015/16-II-3

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha > f$ – cegła się zsuwa

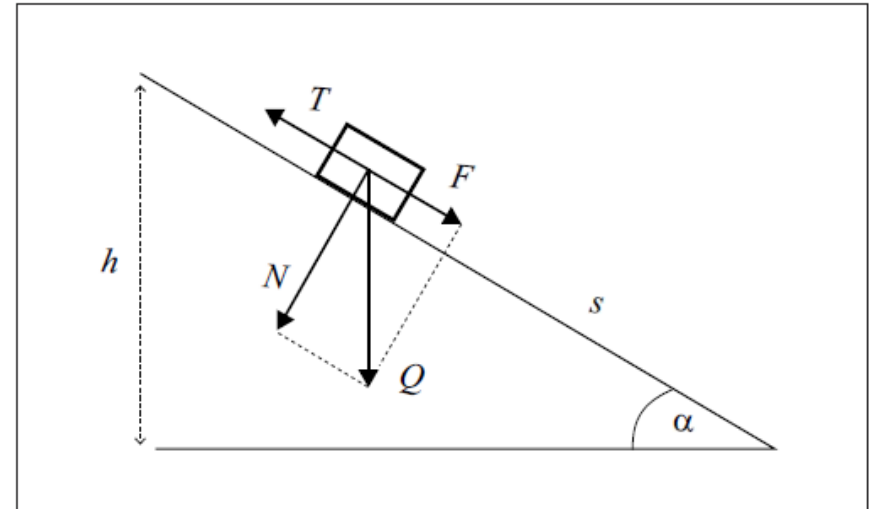
$$T = f \cdot N = f m g \cos \alpha$$

$$W_T = T \cdot s \cdot \cos(180^\circ) = - f m g h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$Q = \eta |W_T| = \eta f m g h \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 23,4 \text{ J}$$

$$Q = m \cdot c_w \cdot \Delta T = \eta f m g h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\Delta T = \frac{\eta f g h \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{c_w} = 0,026^\circ \text{C}$$



Elektryczność

Długość okładek kondensatora:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l h}{d} \Rightarrow l = \frac{C_0 d}{\epsilon_0 h}$$

a) Pojemność nowego kondensatora:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 l (h-x)}{d} + \frac{\epsilon \epsilon_0 l x}{d} = C_0 \left[1 + \frac{x}{h} (\epsilon - 1) \right]$$

b) Energie zgromadzone w kondensatorze:

$$W_{\text{gr}} = mg \frac{x}{2} = \rho l d g \frac{x^2}{2} \quad W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2 C_0}{1 + \frac{x}{h} (\epsilon - 1)}, \quad W = W_{\text{gr}} + W_{\text{el}}$$

c) Warunek równowagi:

$$\frac{dW}{dx} = 0 \Rightarrow \rho l d g x_0 = \frac{1}{2} \frac{U_0^2 \cdot \frac{\epsilon_0 l h}{d} \cdot \frac{\epsilon - 1}{h}}{\left[1 + \frac{x_0}{h} \cdot (\epsilon - 1) \right]^2}$$

Stąd odległość między okładkami:

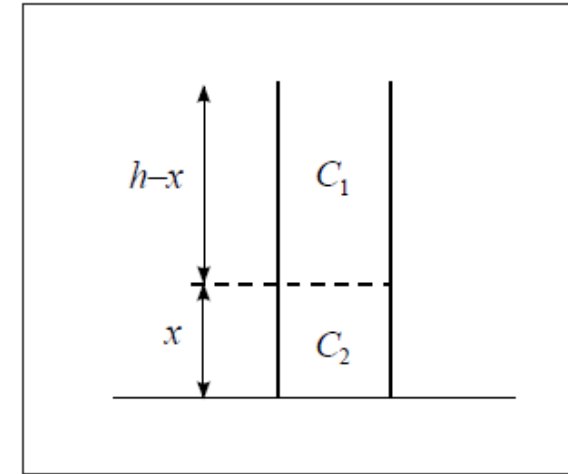
$$d = \frac{U_0}{1 + \frac{x_0}{h} (\epsilon - 1)} \sqrt{\frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2 \rho g x_0}}$$

Przeprowadzamy analizę wymiarową obliczeń:

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}, \quad \nu = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}, \quad [d] = \nu \cdot \sqrt{\frac{\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}}{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} \cdot \text{m}}} = \nu \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \text{m} = \text{m}$$

Kondensator odłączony od źródła zanurzony w cieczy

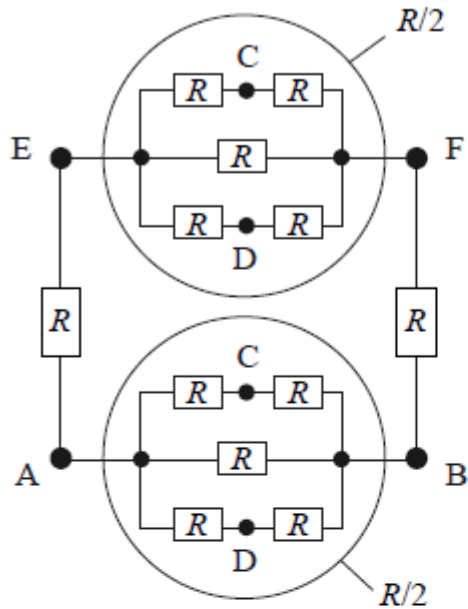
2007/8-III-4



Równowaga sił. Uwaga: nie korzystamy z zasady zachowania energii !!!

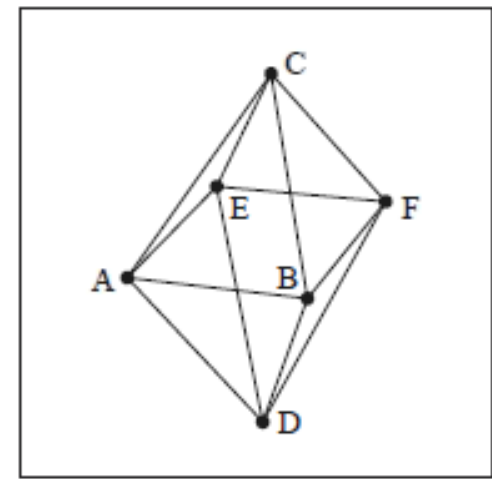
Dla kondensatora podłączonego do źródła - napięcia trzeba pomniejszyć energię kondensatora o pracę źródła !!!

a) $R_{AB} = ?$

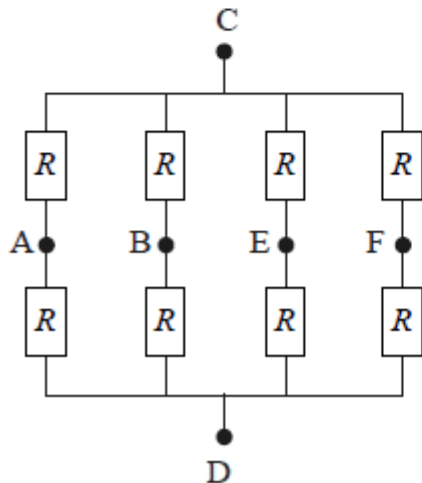


$$R_{AB} = \frac{5}{12} R \approx 4,17 \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{u_{AB}}{R} \\ I_C &= \frac{u_{AB}}{R_{AB}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_{AB}}{R} \approx 0,417 \\ I_C & \end{aligned}$$



b) $R_{CD} = ?$

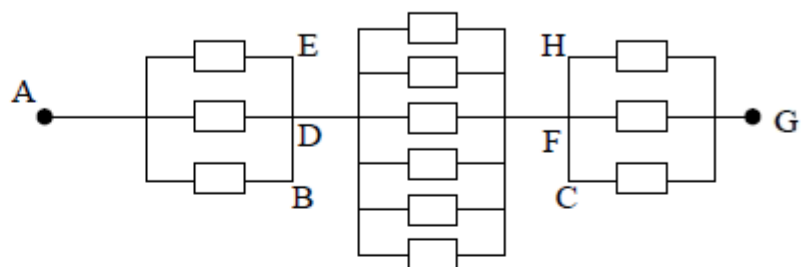
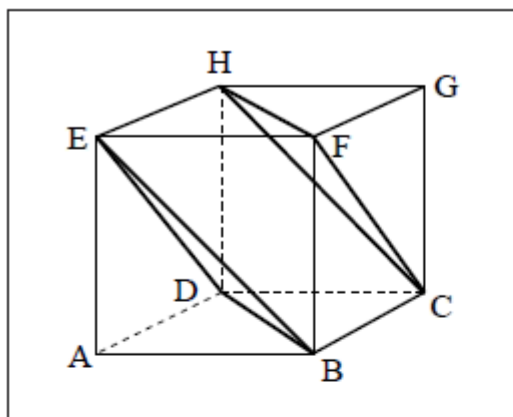


$$R_{CD} = \frac{R}{2} = 5 \Omega$$

Opór zastępczy dla ośmiościanu

2016/17-I-4

a) Połączenie do punktów A i G.
Zwieramy punkty B, D i E oraz C, F i H

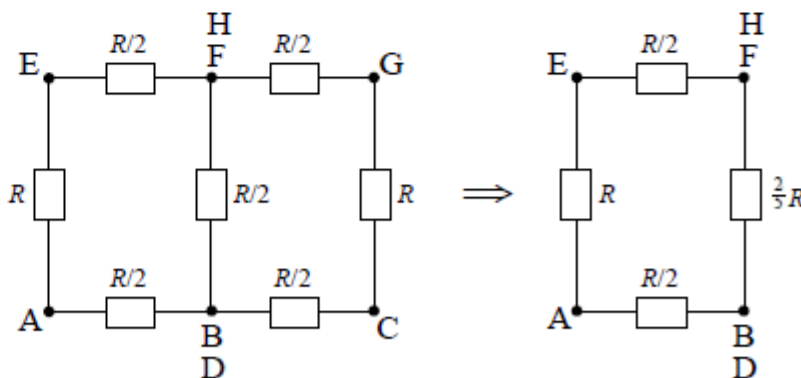
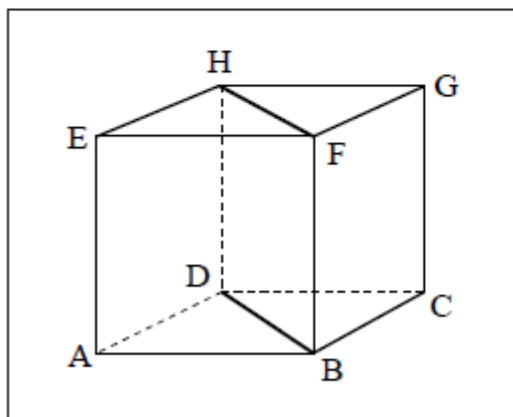


$$R_{AG} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R = \frac{50}{6}\Omega$$

(16)

Opór zastępczy dla sześcianu 2016/17-II-4

b) Połączenie do punktów A i E.
Zwieramy punkty B i D oraz F i H



$$\frac{1}{R_{AE}} = \frac{1}{R} + \frac{5}{7R} \Rightarrow R_{AE} = \frac{7}{12}R = \frac{70}{12}\Omega$$

(17)

ROZWIĄZANIE

Dane: $\varepsilon_1 = 1,5 \text{ V}$, $r_w = 0,2 \Omega$, $P_0 = 24 \text{ W}$, $R = 6 \Omega$

Szukane: n

$$n \cdot \varepsilon_1 = I(n \cdot r_w + R) \Rightarrow I = \frac{n \cdot \varepsilon_1}{n \cdot r_w + R} \quad (22)$$

$$P_{sz} = I^2 \cdot R = \frac{n^2 \cdot \varepsilon_1^2}{(n \cdot r_w + R)^2} \cdot R \quad (23)$$

dla $P_{sz} = P_0$ otrzymujemy:

$$n = \frac{\sqrt{R \cdot P_0}}{\varepsilon_1 - r_w \sqrt{\frac{P_0}{R}}} = 10,9 \approx 11 \quad (24)$$

$$P_{10} = 21,09 \text{ W}$$

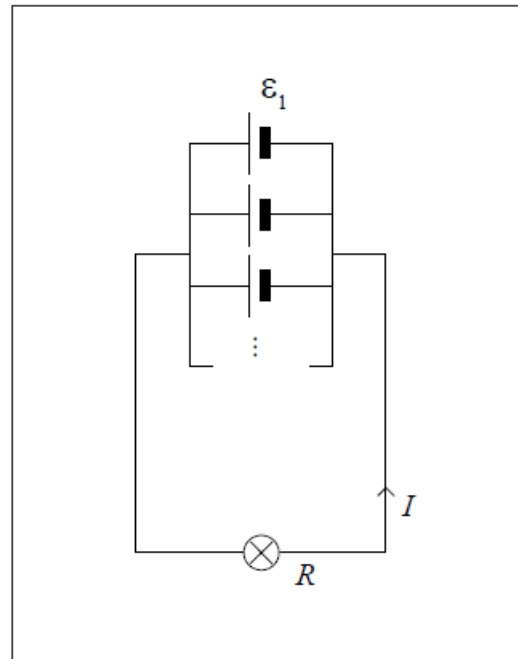
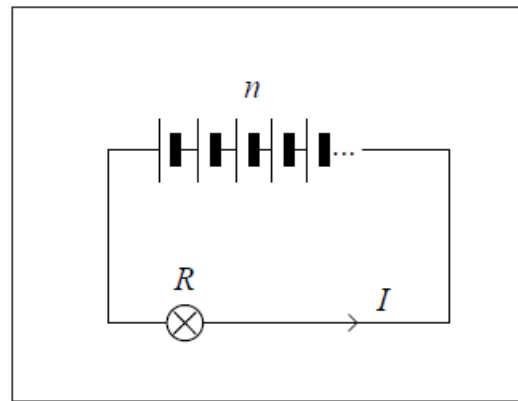
$$P_{11} = 24,29 \text{ W} \quad \leftarrow n = 11$$

$$P_{12} = 27,55 \text{ W}$$

Dla połączenia równoległego:

$$\varepsilon_1 = I \left(\frac{r_w}{n} + R \right), \quad I = \frac{\varepsilon_1}{\frac{r_w}{n} + R} \quad (25)$$

$$P_r = I^2 \cdot R = \left(\frac{\varepsilon_1}{\frac{r_w}{n} + R} \right)^2 R = 0,37 \text{ W} \quad (26)$$



Poprawne świecenie żarówki

2014/15-III-4

Fale i Optyka

ROZWIĄZANIE

Dane: $h = 30$ cm, $R = 5$ m, $H_1 = 40$ cm, $H_2 = 10$ cm

Szukane: f

Prędkość rozchodzenia się fal wodnych w basenie poza soczewką:

$$v_1 = \sqrt{gH_1} \quad (25)$$

Prędkość rozchodzenia się fal wodnych w miejscu nad soczewką:

$$v_2 = \sqrt{gH_2} \quad (26)$$

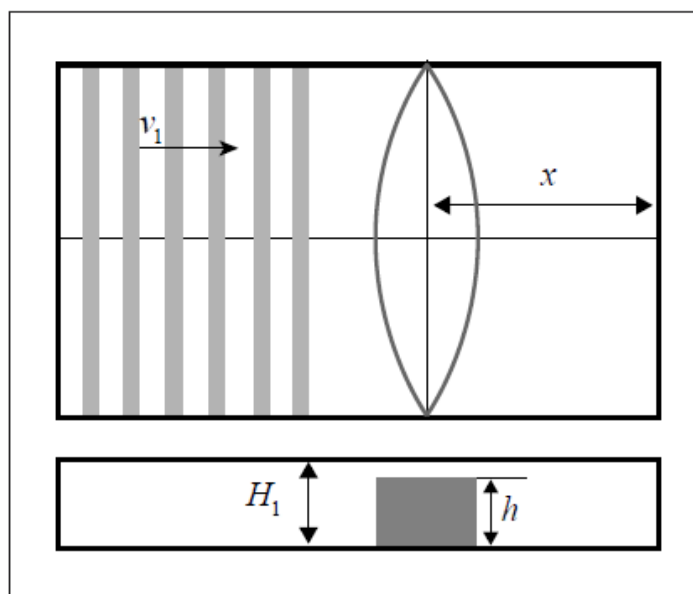
Stosunek prędkości jest współczynnikiem załamania dla fal wodnych

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} = 2 \quad (27)$$

Wzór na ogniskowe soczewki:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \left(\sqrt{\frac{H_1}{H_2}} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R} = \frac{2}{5 \text{ m}} \quad (28)$$

$$f = 2,5 \text{ m}, \quad x = f \quad (29)$$



Fale na wodzie

2016/17-III-5.

Dla fali płaskiej punkt skupienia leży w ognisku, więc x musi być równe f .

$$x' = x - f \Rightarrow x = x' + f; \quad y' = y - f \Rightarrow y = y' + f$$

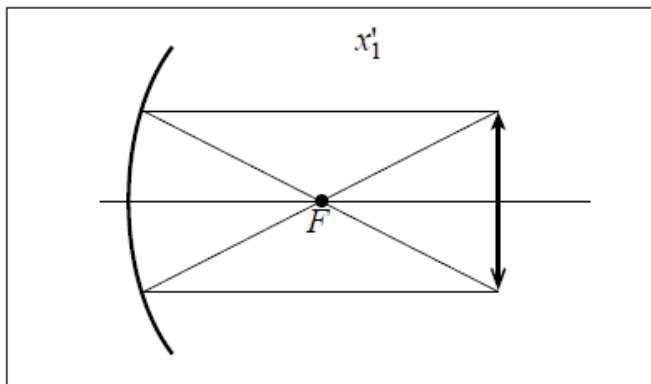
Równanie zwierciadła:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x' + f} + \frac{1}{y' + f} = \frac{1}{f} \Rightarrow x'y' = f^2$$

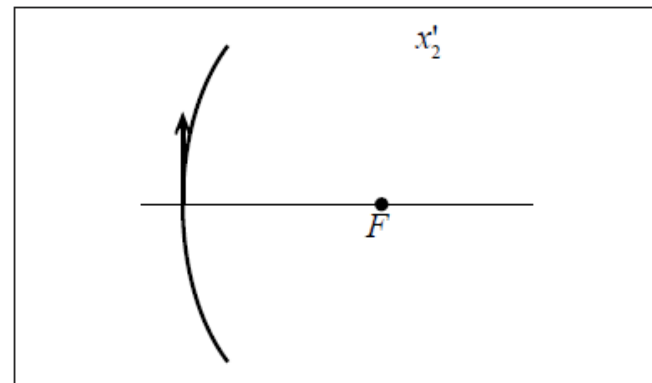
$$p = \frac{y}{x} = \frac{y' + f}{x' + f} = \frac{\frac{f^2}{x'} + f}{x' + f} = \frac{f}{x'}$$

Dla x'_1 : $y'_1 = \frac{f^2}{x'_1} = 0,25 \text{ cm}, \quad p_1 = \frac{f}{x'_1} = 1$

Dla x'_2 : $y'_2 = \frac{f^2}{x'_2} = -0,25 \text{ cm}, \quad p_2 = \frac{f}{x'_2} = -1$



Obraz rzeczywisty, odwrócony,
tej samej wielkości



Przedmiot i obraz znajdują się na płaszczyźnie
lustera. Powstaje obraz pozorny tej samej wielkości.

Wzór Newtona dla zwierciadła

2015/16-III-5.

Zwierciadło wklęsłe – rozmycie obrazu 2015/16-II-5

Co będzie się działo z obrazem na ekranie, jeżeli przedmiot przybliżymy nieznacznie z położenia początkowego do zwierciadła, o $\Delta x_1 = -3$ mm? Czym to się różni od przypadku niewielkiego oddalenia przedmiotu od zwierciadła, o $\Delta x_2 = +3$ mm. ($f = 10$ cm, ekran – 4m)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \Rightarrow x = \frac{y \cdot f}{y - f} = 10,256 \text{ cm} \quad (19)$$

$$p = \frac{y}{x} \approx 39 \quad (20)$$

Przedmiot jest ustawiony blisko ogniska. Powstaje obraz rzeczywisty, odwrócony i powiększony.

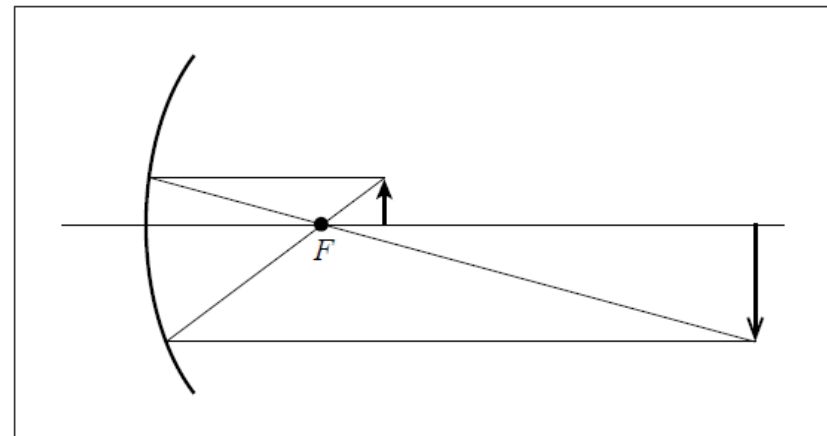
$$x_1 = x + \Delta x_1 = 9,956 \text{ cm} < f \quad (\text{obraz pozorny}) \quad (21)$$

$$y_1 = \frac{x_1 f}{x_1 - f} = -2273 \text{ cm} \quad (\text{brak obrazu na ekranie}) \quad (22)$$

$$x_2 = x + \Delta x_2 = 10,556 \text{ cm}$$

$$y_2 = \frac{x_2 f}{x_2 - f} = 190 \text{ cm}$$

Na ekranie powstanie rozmyty obraz rzeczywisty.



Dane: $R = 50 \text{ cm}$, $H = 20 \text{ cm}$, $n = 4/3$

Szukane: f

Ogniskowa dla F_1 (bez wody):

$$f_1 = \frac{R}{2} = H + x_1 \quad (23)$$

Ogniskowa dla F_2 :

$$f_2 = H + x_2 \quad (24)$$

Z rysunku:

$$\begin{cases} \frac{D}{x_1} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \\ \frac{D}{x_2} = \operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta \end{cases} \quad (25)$$

Co daje:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{n} \quad (26)$$

Zatem:

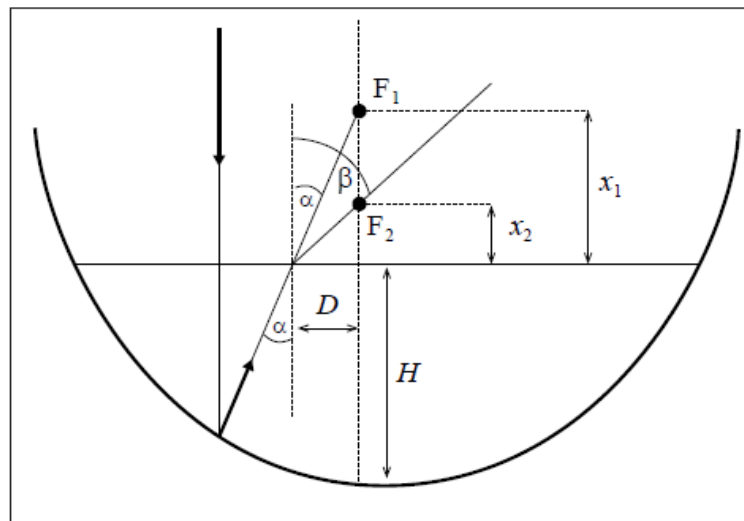
$$f_2 = H + x_2 = H + \frac{x_1}{n} = H + \frac{1}{n} \left(\frac{R}{2} - H \right) = 20 + \frac{3}{4} (25 - 20) = 23,75 \text{ cm} \quad (27)$$

$$\text{dla } H \rightarrow 0 \Rightarrow f_2 = \frac{R}{2n} \quad (28)$$

Co odpowiada układowi składającemu się z dwóch cienkich soczewek o ogniskowej f' i zwierciadła:

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \frac{1}{R} \quad (29)$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{2}{R} + \frac{2}{f'} = \frac{2}{R} + \frac{2(n-1)}{R} = \frac{2n}{R} \quad (30)$$



Zwierciadło wklęsłe zalane wodą

2013/14-III-5

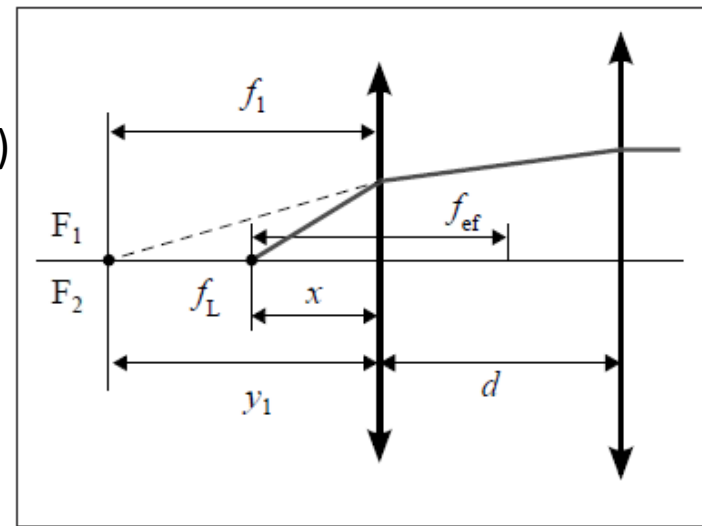
Układy soczewek – wzór Gullstranda

efektywne parametry układu (zastąpienie go jedną soczewką)

2007/8-I-3

$$\text{I: } \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_1} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{x f_1}{x - f_1} = -10 \text{ cm}$$

$$\text{II: } \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{\underbrace{y_2}_{=0}} \quad \text{oraz} \quad x_2 = -y_1 + d, \quad y_2 = \infty$$



Wiemy, że aby soczewka dawała wiązkę równoległą, należy przedmiot umieścić w jej ognisku, zatem:

$$-y_1 + d = f_2 \quad \Rightarrow \quad d = f_2 + y_1 = 10 \text{ cm} \quad (14)$$

Zaprezentowany powyżej sposób analizy, w którym obraz z pierwszej soczewki służy jako przedmiot dla drugiej soczewki, pozwala obliczyć miejsca skupienia wiązki równoległej, padającej z lewej lub prawej strony.

$$\begin{cases} \frac{1}{f_L} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1 - d} \Rightarrow f_L = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d} \\ \frac{1}{f_P} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2 - d} \Rightarrow f_P = \frac{f_1(f_2 - d)}{f_1 + f_2 - d} \end{cases} \quad (15)$$

Ogniskowe f_L i f_P oraz odległości przedmiotu i obrazu są mierzone od środka odpowiednich soczewek. Wzory te można stosować dla $d < f_1 + f_2$, jednak przy takim opisie układ nie da się przedstawić jako pojedyncza soczewka (nie spełnia równania soczewki dla żadnej z ogniskowych). Aby uzyskać efektywne parametry układu (zastąpienie go jedną soczewką) trzeba przejść do opisu, w którym wszystkie odległości są mierzone względem tzw. płaszczyzn głównych. Przy takich założeniach na ogniskową układu stosuje się tzw. wzór Gullstranda:

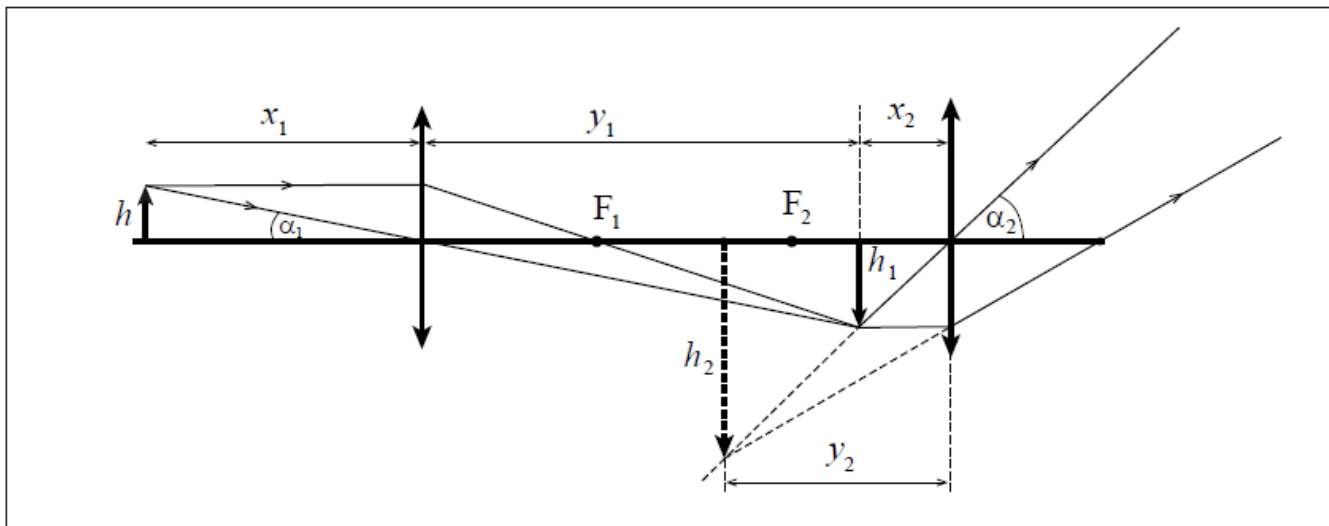
$$\frac{1}{f_{\text{ef}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{ef}} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = 10 \text{ cm} \quad (16)$$

$$y_2 = -D; \quad \alpha_1 = 2'' \quad (\text{dwie sekundy kątowne}) \quad (20)$$

Dla małych kątów $\text{tg } \alpha_1 = \alpha_1 = 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$

Rozdzielczość kątowna lunety

2016/17-I-5.



$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{x_1 \cdot f_1}{x_1 - f_1} \quad (21)$$

$$\text{Jeżeli } x_1 \gg f_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 \approx f_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \alpha_1 \cdot f_1 \quad (22)$$

$$y_2 \approx \frac{x_2 \cdot f_2}{x_2 - f_2} = -d \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{f_2 d}{f_2 + d} \quad (23)$$

$$\alpha_2 = \frac{h_1}{x_2} = \frac{\alpha_1 f_1 (f_2 + d)}{f_2 d} \approx 14' \quad (24)$$

Zdolność rozdzielcza dla otworu kołowego: $\alpha_1 = \alpha_{\min}$

$$\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{D} \cdot 1,22 \quad \Rightarrow \quad D = 1,22 \frac{\lambda}{\alpha_{\min}} \approx 6,3 \text{ cm} \quad (25)$$

Dziękuję za uwagę

Uprzejmie proszę o zgłaszanie uwag, w tym dotyczących:

- ciekawych zadań
- błędów edytorskich i merytorycznych

Zachęcam do korzystania ze zbioru zadań olimpijskich